

FÍSICA Vol. 1

CUARTA EDICIÓN
(Tercera en español)

ROBERT RESNICK

*Professor of Physics
Rensselaer Polytechnic Institute*

DAVID HALLIDAY

*Professor of Physics, Emeritus
University of Pittsburgh*

KENNETH S. KRANE

*Professor of Physics
Oregon State University*

TRADUCCIÓN

Francisco Andión Uz
*Ingeniero Mecánico Electricista
Facultad de Ingeniería
UNAM*

REVISIÓN TÉCNICA

Francisco Medina Nicolau
*Doctor en Física
Facultad de Ciencias
UNAM
Área de Física
UAM Azcapotzalco*

Consuelo Gómez
*Física
Facultad de Ciencias
UNAM*

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DPTO. DE DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
BIBLIOTECA CENTRAL
Ing. Edo. García de Zúñiga
MONTEVIDEO - URUGUAY

No. de Entrada 054353,
22.11.02

DÉCIMA SEGUNDA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 2001

COMPañÍA EDITORIAL CONTINENTAL

Para establecer comunicación
con nosotros puede hacerlo por:



correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan
Tlihuaca, Azcapotzalco,
02400, México, D.F.



fax pedidos:
(015) 561 4063 • 561 5231



e-mail:
info@patriacultural.com.mx



home page:
<http://www.patriacultural.com.mx>

Título original de la obra:
PHYSICS, Vol. I, 4 th. ed.
ISBN 0-471-80458-4

Traducción autorizada por:
Copyright ©1992, by John Wiley & Sons. Inc.

Física Vol. I

Derechos reservados respecto a la edición en español:
© 1992, 1993, Robert Resnick, David Halliday,
Kenneth S. Krane/ John Wiley & Sons. Inc.
© 1993, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V.
© 2000, GRUPO PATRIA CULTURAL, S.A. DE C.V.
bajo el sello de Compañía Editorial Continental
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, C.P. 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro num. 43

ISBN 968-26-1230-6 (tercera edición)
(ISBN 968-26-0617-3 segunda edición)
ISBN 968-26-0663-2 (obra completa)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del
contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean
electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito
del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

Tercera edición: 1993
Décima primera reimpresión: 2000
Décima segunda reimpresión: 2001

PREFACIO AL VOLUMEN 1

La primera edición de *Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería* apareció en 1960; la edición más reciente (la tercera), llamada simplemente *Física*, fue publicada en 1977. En esta cuarta edición (1992) cabe destacar la presencia de un nuevo coautor.

El texto ha sido actualizado para incluir los nuevos desarrollos en física y en su pedagogía. Basados en nuestra lectura de la literatura sobre estos temas, en los comentarios de numerosos lectores de las ediciones anteriores, y en la asesoría de un grupo de colaboradores que trabajaron con gran dedicación en la revisión del manuscrito de esta edición, hemos hecho varios cambios.

1. La energía se trata de una manera coherente a lo largo de todo el texto, comenzando con el teorema de trabajo-energía y continuando con la termodinámica. Por ejemplo, calculamos el trabajo, de manera que no deje lugar a dudas, como aquél efectuado *sobre* un sistema, usando entonces la misma convención de signos para el trabajo tanto en mecánica como en termodinámica. La atención de estos detalles ayuda al estudiante a discernir los conceptos comunes que intervienen en las diferentes áreas de la física.

2. La relatividad especial, que fue tratada como un tema suplementario en la edición anterior, se halla integrada a este texto. Se dedican dos capítulos a este tema: uno (en el Volumen 1) estudia las ondas mecánicas y el otro (en el Volumen 2) estudia las ondas electromagnéticas. Los temas relacionados con la relatividad especial (por ejemplo, movimiento relativo, marcos de referencia, cantidad de movimiento y energía) se tratan en el texto en los capítulos sobre cinemática, mecánica, y electromagnetismo. Este enfoque refleja nuestro punto de vista de que la relatividad especial debería ser tratada como parte de la física clásica. Sin embargo, para aquellos instructores que desean proponer la relatividad especial para el final del curso, el material se ha preparado en secciones aparte que pueden omitirse sin mayor problema en la primera lectura.

3. Entre los cambios en el ordenamiento de los temas de la tercera edición se incluye el cambio en el orden de aparición de los capítulos 2 y 3, de modo que la cinemática unidimensional precede ahora a los vectores; la consolidación de todo el material sobre el momento angular en el capítulo 13 (donde se incluyen la cinemática y la dinámica de rotación, lo que hace que nuestra exposición del movimiento de rotación sea más cercanamente paralelo a la del movimiento de traslación); y un reordenamiento y reconstrucción sustancial de los capítulos sobre termodinámica, haciendo hincapié en sus aspectos estadísticos, y dando al tema un tono más “moderno”.

4. En respuesta a las peticiones de los usuarios, se han añadido al Volumen 1 varios temas clásicos nuevos; éstos incluyen el análisis dimensional, fuerzas de arrastre, elasticidad, tensión superficial, viscosidad, y acústica musical.

5. Las aplicaciones modernas se han repartido “salpicadas”, a lo largo del texto: por ejemplo, la cuantización de la energía y el momento angular, la desintegración del núcleo y de las partículas elementales, teoría del caos, relatividad general, y estadística cuántica. Éstas no pretenden dar aquí un tratamiento a fondo de la física moderna (lo cual se hace así en los ocho capítulos adicionales de la versión ampliada del Volumen 2), sino indicar al estudiante cuáles son las fronteras de la física clásica y las relaciones entre ésta y la física moderna.

6. Hemos aumentado de manera sustancial el número de problemas al final de cada capítulo, en comparación con la edición previa del Volumen 1; hay ahora 1519 problemas, frente a los 958 anteriores, lo que constituye un aumento del 59%. El número de preguntas al final de cada capítulo ha sido igualmente aumentado de 614 a 821 (34%). Por otra parte, hemos tratado de mantener la calidad, y diversidad de los problemas que han conformado el sello de garantía de las ediciones anteriores de este texto.

530
R 434 f 4 E 3 a
v. 1
e. 45

7. El número de ejemplos resueltos en el Volumen 1 se ha aumentado de 135 a 183 (36%). El aumento real del número de ejemplos resueltos (ahora llamados problemas muestra) es más grande, porque la edición anterior presentaba ocasionalmente los temas nuevos por medio de ejemplos resueltos. Esta edición elimina esa práctica; el nuevo material se presenta sólo en la exposición del texto, y los problemas muestra sirven sólo como ejercicios en su aplicación.

8. Las técnicas de computación se presentan mediante varios ejemplos resueltos y una variedad de proyectos de computación al final del capítulo. Se ofrecen algunos listados de programas en un apéndice para animar al estudiante a adaptar esos métodos a otras aplicaciones.

9. Hemos aumentado y actualizado las referencias a artículos en la literatura que aparecen como notas al pie de página a lo largo del texto. Ciertas referencias (a menudo de artículos que aparecen en conocidas revistas de divulgación tales como *Scientific American*) tienen la intención de ampliar los conocimientos del estudiante a través de aplicaciones interesantes de un tema. En otros casos, que a menudo implican asuntos de importancia pedagógica sobre los cuales deseamos llamar la atención del estudiante y del instructor, hacemos referencia a artículos de revistas tales como el *American Journal of Physics* o el *Physics Teacher*.

10. Las ilustraciones han sido completamente renovadas y su número en el Volumen 1 se ha aumentado en casi un factor de 2, es decir de 463 a 899

11. Muchas de las deducciones, pruebas, y argumentos de la edición anterior se han perfeccionado, y toda hipótesis o aproximación ha sido aclarada. Asimismo hemos mejorado el rigor del texto sin elevar necesariamente su nivel. Nuestro empeño es indicar al estudiante el límite de validez de un argumento en particular y animarlo a que considere preguntas tales como: ¿coresponde siempre un resultado en particular o sólo a veces? ¿Qué pasa a medida que nos acercamos al límite cuántico o al límite relativista?

Aun cuando hemos hecho cierto esfuerzo para eliminar material de la edición anterior, las adiciones mencionadas antes hacen que el texto aumente de tamaño. *Deberá subrayarse que muy pocos instructores (si los hay) querrán seguir todo el texto de principio a fin.* Hemos trabajado para desarrollar un texto que ofrezca una introducción rigurosa y completa a la física, pero el instructor puede seguir muchos caminos alternativos a lo largo del libro. El instructor que desee tratar algunos temas con mayor profundidad (el enfoque de “lo menos es más”, como suele decirse) podrá elegir entre estos caminos de los que hablamos. Algunas secciones han sido

explícitamente marcadas como “opcionales” (se hallan impresas en un cuerpo de tipografía más pequeño), para indicar que pueden omitirse sin pérdida de la continuidad. Dependiendo del diseño del curso, pueden omitirse también o tratarse en forma más superficial otras secciones e incluso capítulos enteros. La guía del instructor, disponible en un volumen adicional, ofrece sugerencias para resumir o abreviar la extensión del texto. En tales circunstancias, el estudiante curioso que desee un estudio más profundo puede encontrar estímulo por su parte al abordar esos temas omitidos, con lo que podrá adquirir una visión más amplia de la materia. Así, el instructor tiene a la mano una amplia elección para cubrir determinado grupo reducido de temas en un curso. Para el instructor que desee una cobertura más completa, que le sirva para cursos para estudiantes con especialización en física, para estudiantes destacados, o para cursos de más de un año de duración, este texto provee el material adicional suficiente para una experiencia retadora y de alcance amplio. Esperamos que el texto sea considerado como una verdadera guía para adentrarse en la física; son muchos los caminos que pueden tomarse, panorámicos unos y directos otros, y no hay por qué recorrerlos todos en el primer viaje. El viajero más avezado puede sentirse animado a recurrir a esa guía para explorar zonas por las que no pasó en viajes anteriores.

El texto está disponible en volúmenes por separado: el Volumen 1 (capítulos 1 al 26) comprende la cinemática, la mecánica, y la termodinámica, y el Volumen 2 (capítulos 27 al 48) abarca el electromagnetismo y la óptica. Se dispone de una versión aumentada del Volumen 2 (capítulos 27 al 56) con ocho capítulos adicionales que presentan una introducción a la física cuántica y alguna de sus aplicaciones.

Un libro de texto contiene muchas más contribuciones a la ilustración de un tema que las hechas por los autores únicamente. Hemos tenido la fortuna de contar con la ayuda de Edward Derringh (Wentworth Institute of Technology) para preparar los conjuntos de problemas y de J. Richard Christman (U.S. Coast Guard Academy) para preparar la Guía del Instructor y los proyectos de computación. Nos hemos beneficiado de la gran dedicación que han puesto en sus comentarios y críticas capítulo tras capítulo el siguiente grupo de revisores:

- Robert P. Bauman (University of Alabama)
- Truman D. Black (University of Texas, Arlington)
- Edmond Brown (Rensselaer Polytechnic Institute)
- J. Richard Christman (U.S. Coast Guard Academy)
- Sumner Davis (University of California, Berkeley)
- Roger Freedman (University of California, Santa Barbara)
- James B. Gerhart (University of Washington)
- Richard Thompson (University of Southern California)
- David Wallach (Pennsylvania State University)
- Roald K. Wangsness (University of Arizona)

Estamos profundamente agradecidos y obligados hacia todos ellos por sus sustanciales contribuciones a este proyecto.

Damos las gracias al personal de John Wiley & Sons por su notable cooperación y apoyo, entre quienes se cuentan Cliff Mills, editor de física; Cathy Donovan, asistente del programa editorial; Cathy Faduska, gerente de mercadotecnia; John Balbalis, ilustrador; Deborah Herbert, supervisora editorial; Karin Kincheloe, diseñadora; Lucille Buonocore, supervisora de producción; Jennifer Atkins, investigadora de fotografía; Christina Della Bartolomea, copieditora. El proceso de mecanografía del

manuscrito de esta edición fue magníficamente ejecutado por Christina Godfrey.

- | | |
|-----------------|---|
| Septiembre 1991 | ROBERT RESNICK
<i>Rensselaer Polytechnic Institute
Troy, Nueva York 12180-3590</i> |
| | DAVID HALLIDAY
<i>Seattle, Washington</i> |
| | KENNETH S. KRANE
<i>Oregon State University
Corvallis, Oregon 97331</i> |

CONTENIDO

CAPÍTULO 1	
MEDICIONES 1	
1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades	1
1-2 El Sistema Internacional de Unidades	2
1-3 Patrón de Tiempo	3
1-4 Patrón de Longitud	5
1-5 Patrón de Masa	7
1-6 Precisión y Cifras Significativas	8
1-7 Análisis Dimensional	10
Preguntas y Problemas	11
CAPÍTULO 2	
MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL 17	
2-1 Cinemática de la Partícula	17
2-2 Descripciones del Movimiento	17
2-3 Velocidad Promedio	20
2-4 Velocidad Instantánea	21
2-5 Movimiento Acelerado	23
2-6 Movimiento con Aceleración Constante	25
2-7 Cuerpos en Caída Libre	28
2-8 Galileo y la Caída-Libre (Opcional)	29
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre (Opcional)	30
Preguntas y Problemas	31
CAPÍTULO 3	
VECTORES 41	
3-1 Vectores y Escalares	41
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico	42
3-3 Componentes de Vectores	43
3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes	46
3-5 Multiplicación de Vectores	48
3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física (Opcional)	50
Preguntas y Problemas	53
CAPÍTULO 4	
MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL 59	
4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración	59
4-2 Movimiento con Aceleración Constante	61
4-3 Movimiento de Proyectiles	63
4-4 Movimiento Circular Uniforme	67
4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular (Opcional)	69
4-6 Movimiento Relativo	71
Preguntas y Problemas	74
CAPÍTULO 5	
FUERZA Y LAS LEYES DE NEWTON 87	
5-1 Mecánica Clásica	87
5-2 Primera Ley de Newton	88
5-3 Fuerza	90
5-4 Masa	90
5-5 Segunda Ley de Newton	92
5-6 Tercera Ley de Newton	94
5-7 Unidades de Fuerza	96
5-8 Peso y Masa	97
5-9 Medición de Fuerzas	99
5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton	100
5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton	103
Preguntas y Problemas	106

CAPÍTULO 6	
DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117	
6-1 Leyes de la Fuerza	117
6-2 Fuerzas de Fricción	118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular	
Uniforme	123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas	
Constantes y No Constantes	126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos	
Analíticos	128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos	
Numéricos (<i>Opcional</i>)	129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de	
Proyectiles	130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas	
(<i>Opcional</i>)	133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton	
(<i>Opcional</i>)	135
Preguntas y Problemas	137
CAPÍTULO 7	
TRABAJO Y ENERGÍA 149	
7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante	149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable:	
Caso Unidimensional	153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable:	
Caso Bidimensional (<i>Opcional</i>)	155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía	157
7-5 Potencia	159
7-6 Marcos de Referencia (<i>Opcional</i>)	160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades	
(<i>Opcional</i>)	162
Preguntas y Problemas	163
CAPÍTULO 8	
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171	
8-1 Fuerzas Conservativas	171
8-2 Energía Potencial	174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales	176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales:	
La Solución Completa	179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y	
Tridimensionales (<i>Opcional</i>)	182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema	
de Partículas	183

8-7 Masa y Energía (<i>Opcional</i>)	187
8-8 Cuantización de la Energía (<i>Opcional</i>)	189
Preguntas y Problemas	190

CAPÍTULO 9	
SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203	

9-1 Sistemas de Dos Partículas	203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas	206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos	209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula	212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas	213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal	214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas	
(<i>Opcional</i>)	217
9-8 Sistemas de Masa Variable (<i>Opcional</i>)	220
Preguntas y Problemas	224

CAPÍTULO 10	
COLISIONES 233	

10-1 ¿Qué es una Colisión?	233
10-2 Impulso e Ímpetu	234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones	236
10-4 Colisiones en una Dimensión	237
10-5 Colisiones Bidimensionales	241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa	244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea	
(<i>Opcional</i>)	248
Preguntas y Problemas	250

CAPÍTULO 11	
CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261	

11-1 Movimiento de Rotación	261
11-2 Las Variables de la Rotación	262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante	264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores	265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y	
Angulares: Forma Escalar	268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y	
Angulares: Forma Vectorial (<i>Opcional</i>)	269
Preguntas y Problemas	271

CAPÍTULO 12	
DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277	

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General	277
--	-----

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia	
de la Rotación	278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos	281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula	283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido	286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación	
Combinados	290
Preguntas y Problemas	296

CAPÍTULO 13	
ÍMPETU ANGULAR 305	

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula	305
13-2 Sistemas de Partículas	307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular	309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular	313
13-5 El Trompo	319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular (<i>Opcional</i>)	320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso	321
Preguntas y Problemas	321

CAPÍTULO 14	
EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS 331	

14-1 Condiciones de Equilibrio	331
14-2 Centro de Gravedad	332
14-3 Ejemplos de Equilibrio	334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los	
Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio	339
14-5 Elasticidad	341
Preguntas y Problemas	344

CAPÍTULO 15	
OSCILACIONES 353	

15-1 Sistemas Oscilatorios	353
15-2 El Oscilador Armónico Simple	355
15-3 Movimiento Armónico Simple	356
15-4 Consideraciones Energéticas en el	
Movimiento Armónico Simple	359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico	
Simple	361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento	
Circular Uniforme	365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos	367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado	
(<i>Opcional</i>)	368

15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia	
(<i>Opcional</i>)	370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos (<i>Opcional</i>)	371
Preguntas y Problemas	373

CAPÍTULO 16	
GRAVITACIÓN 383	

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta	
Kepler	383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal	385
16-3 La Constante Gravitatoria <i>G</i>	386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la	
Tierra	388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución	
Esférica de la Materia (<i>Opcional</i>)	390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria	393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial	
(<i>Opcional</i>)	396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites	397
16-9 Gravitación Universal	402
16-10 La Teoría General de la Relatividad	
(<i>Opcional</i>)	404
Preguntas y Problemas	408

CAPÍTULO 17	
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS 419	

17-1 Fluidos y Sólidos	419
17-2 Presión y Densidad	420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en	
Reposo	422
17-4 Principio de Pascal y Principio de	
Arquímedes	426
17-5 Medición de la Presión	429
17-6 Tensión Superficial (<i>Opcional</i>)	431
Preguntas y Problemas	433

CAPÍTULO 18	
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS 441	

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos	441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación	
de Continuidad	442
18-3 La Ecuación de Bernoulli	445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y	
de la Ecuación de Continuidad	447
18-5 Campos de Flujo (<i>Opcional</i>)	450

18-6 Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico	
<i>(Opcional)</i>	453
Preguntas y Problemas	456

CAPÍTULO 19	
MOVIMIENTO ONDULATORIO 465	
19-1 Ondas Mecánicas	465
19-2 Tipos de Ondas	466
19-3 Ondas Viajeras	467
19-4 Velocidad de Onda	471
19-5 La Ecuación de la Onda <i>(Opcional)</i>	471
19-6 Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio	475
19-7 El Principio de Superposición	476
19-8 Interferencia de Ondas	478
19-9 Ondas Estacionarias	482
19-10 Resonancia	485
Preguntas y Problemas	487

CAPÍTULO 20	
ONDAS SONORAS 495	
20-1 La Velocidad del Sonido	495
20-2 Ondas Viajeras Longitudinales	497
20-3 Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras	499
20-4 Ondas Longitudinales Estacionarias	501
20-5 Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido	503
20-6 Pulsaciones	506
20-7 El Efecto Doppler	508
Preguntas y Problemas	511

CAPÍTULO 21	
LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD 519	
21-1 Las Dificultades con la Física Clásica	519
21-2 Los Postulados de la Relatividad Especial	521
21-3 Consecuencias de los Postulados de Einstein	522
21-4 La Transformación de Lorentz	526
21-5 Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso	529
21-6 La Transformación de las Velocidades	529
21-7 Consecuencias de la Transformación de Lorentz	531
21-8 Ímpetu Relativista	535
21-9 Energía Relativista	537
21-10 La Lógica la Relatividad Especial	540
Preguntas y Problemas	541

CAPÍTULO 22	
TEMPERATURA 547	
22-1 Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica	547
22-2 Temperatura y Equilibrio Térmico	548
22-3 Medición de la Temperatura	549
22-4 La Escala de Temperatura de un Gas Ideal	552
22-5 Dilatación Térmica	554
Preguntas y Problemas	558

CAPÍTULO 23	
LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL 565	
23-1 Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal	565
23-2 El Gas Ideal: Un Modelo	568
23-3 Cálculo Cinético de la Presión	569
23-4 Interpretación Cinética de la Temperatura	571
23-5 Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal	572
23-6 La Energía Interna de un Gas Ideal	576
23-7 Fuerzas Intermoleculares <i>(Opcional)</i>	578
23-8 La Ecuación de Estado de van der Waals <i>(Opcional)</i>	579
Preguntas y Problemas	581

CAPÍTULO 24	
MECÁNICA ESTADÍSTICA 587	
24-1 Distribuciones Estadísticas y Valores Medios	587
24-2 Recorrido libre medio	589
24-3 La Distribución de las Velocidades Moleculares	593
24-4 La Distribución de las Energías	597
24-5 Movimiento Browniano	599
24-6 Distribuciones Estadísticas Cuánticas <i>(Opcional)</i>	600
Preguntas y Problemas	603

CAPÍTULO 25	
EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 607	
25-1 El Calor: Energía en Tránsito	607
25-2 Capacidad Calorífica y Calor Específico	609
25-3 Capacidades Caloríficas de los Sólidos	611
25-4 Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal	612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica	616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley	619
25-7 La Transferencia de Calor	622
Preguntas y Problemas	626

CAPÍTULO 26	
ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA 635	
26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles	635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley	637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley	639
26-4 El Ciclo de Carnot	641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica	644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles	646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles	648
26-8 Entropía y la Segunda Ley	650
26-9 Entropía y Probabilidad	651
Preguntas y Problemas	653

APÉNDICES

A El Sistema Internacional de Unidades (SI)	A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física	A-3
C Algunos Datos Astronómicos	A-4
D Propiedades de los Elementos	A-5
E Tabla Periódica de los Elementos	A-7
F Partículas Elementales	A-8
G Factores de Conversión	A-10
H Fórmulas Matemáticas	A-14
I Programas de Computadora	A-16
J Premios Nobel de Física	A-20
K Tablas	A-24
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES	A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS	F-1
ÍNDICE	I-1

CAPÍTULO 1

MEDICIONES

A pesar de la belleza matemática de algunas de sus más complejas y abstractas teorías, incluyendo las de las partículas elementales y de la relatividad general, la física es sobre todo una ciencia experimental. Es, por tanto, crucial que quienes realizan mediciones precisas se pongan de acuerdo acerca de patrones mediante los cuales puedan expresarse los resultados de esas mediciones, de modo que puedan ser comunicadas de un laboratorio a otro y verificadas.

En este capítulo comenzaremos nuestro estudio de la física con la introducción de algunas de las unidades básicas de las cantidades físicas y de los patrones que han sido aceptados para su medición.

Tomamos en cuenta la manera adecuada de expresar los resultados de cálculos y mediciones, incluyendo las dimensiones apropiadas y el número de cifras significativas. Discutimos e ilustramos la importancia de poner atención a las dimensiones de las cantidades que aparecen en nuestras ecuaciones. Más adelante en el texto, se presentarán otras unidades básicas y muchas unidades derivadas según fuera necesario.

1-1 LAS CANTIDADES FÍSICAS, PATRONES Y UNIDADES

El material fundamental que constituye la física lo forman las cantidades físicas, en función de las cuales se expresan las leyes de esta ciencia. Entre éstas están longitud, masa, tiempo, fuerza, velocidad, densidad, resistividad, temperatura, intensidad luminosa, intensidad del campo magnético, y muchas más. Muchas de estas palabras, tales como longitud y fuerza, son parte de nuestro vocabulario cotidiano. Por ejemplo, podría decirse: “Recorrería cualquier *distancia* (longitud) para ayudarte mientras no emplees la *fuerza* para obligarme a hacerlo.” Sin embargo, en física no debemos engañarnos con los significados cotidianos de estas palabras. Las definiciones científicas precisas de longitud y de fuerza no tienen conexión alguna con los usos de estas palabras en la frase entre comillas.

Podemos definir una cantidad algebraica, por ejemplo, *L* para la longitud, o cualquier otra que elijamos, y podemos suponer que es exactamente conocida. Sin embargo, cuando tratamos de asignar una unidad a un valor particular de esa cantidad, encontramos dificultades para establecer un *patrón*, de manera que quienes tienen la

necesidad de comparar una longitud con otra, concuerden en las unidades de medición. Antiguamente, la medida inglesa de longitud era la yarda, determinada por el tamaño de la cintura del rey. Podemos fácilmente deducir cuáles serán los problemas de un patrón así: por un lado, es difícilmente *accesible* a quienes necesitan calibrar sus propios patrones secundarios y, por otro, no es *invariable* al cambio con el paso del tiempo.

Por fortuna, no es necesario definir y concordar sobre patrones para cada cantidad física. Ciertas cantidades elementales pueden ser más fáciles de establecer como patrones, y las cantidades más complejas pueden a menudo ser expresadas en función de las unidades elementales. *Longitud y tiempo*, por ejemplo, estuvieron durante muchos años entre las cantidades físicas más precisamente mensurables y fueron generalmente aceptadas como patrones. Por lo contrario, la *velocidad* fue menos sujeto de medición precisa y, por lo tanto tratada como una unidad derivada ($\text{velocidad} = \text{longitud}/\text{tiempo}$). Sin embargo, hoy día las mediciones de la velocidad de la luz han llegado a una precisión más allá del patrón anterior de longitud; todavía tratamos la longitud como una unidad fundamental, pero el patrón para su medición se deriva ahora de los patrones de velocidad y de tiempo.

El problema básico es, por lo tanto, elegir el número más pequeño posible de cantidades físicas como fundamentales y estar de acuerdo con los patrones para su medición. Estos patrones deben ser tanto accesibles como invariables, lo cual puede ser difícil de satisfacer de manera simultánea. Si el kilogramo patrón, por ejemplo, ha de ser un objeto invariable, debe ser *inaccesible* y mantenerse aislado más allá de los efectos del uso y de la corrosión.

Los acuerdos respecto a los patrones han sido logrados luego de una serie de reuniones internacionales de la Conferencia General de Pesos y Medidas que se inició en 1889; la 19a. reunión tuvo lugar en 1991. Una vez que un patrón ha sido aceptado, tal es el *segundo* como una unidad de *tiempo*, entonces puede aplicarse la unidad a una amplia gama de mediciones, desde la duración de vida del protón (mayor de 10^{40} segundos) hasta la duración de vida de las partículas menos estables que puedan ser producidas en nuestros laboratorios (alrededor de 10^{-23} segundos). Cuando expresamos un valor tal como 10^{40} en unidades de segundos, significa que la razón entre la duración de vida del protón y el intervalo de tiempo que se definió arbitrariamente como el patrón segundo es de 10^{40} . Para lograr tal medición, debemos tener una manera de comparar los instrumentos de medición del laboratorio con el patrón. Muchas de estas comparaciones son indirectas, ya que ningún instrumento de medición es capaz de operar con precisión sobre 40 órdenes de magnitud. Sin embargo, es esencial al progreso de la ciencia que, cuando un investigador registra un intervalo de tiempo en particular con un instrumento de laboratorio, la lectura pueda de algún modo ser relacionada con una calibración basada en el patrón segundo.

La búsqueda de patrones más precisos o accesibles es en sí un empeño científico importante, donde intervienen físicos y otros investigadores en los laboratorios de todo el mundo. En Estados Unidos, los laboratorios del Instituto Nacional de Patrones y Tecnología (NIST), anteriormente la Oficina Nacional de Patrones (NBS) están dedicados a mantener, desarrollar, y probar patrones para investigadores de básicos así como para científicos e ingenieros en la industria. Las mejoras en los patrones en años recientes han sido extraordinarias: desde la primera edición de este texto (1960), la precisión del patrón segundo ha mejorado en un factor superior a 1000.

1-2 EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES*

La Conferencia General de Pesas y Medidas, en las reuniones sostenidas durante el periodo 1954-1971, seleccionó como unidades básicas las siete cantidades mostradas en la tabla 1. Éstas son la base del Sistema Internacional

TABLA 1 UNIDADES BÁSICAS DEL SI

Cantidad	Unidad SI	
	Nombre	Símbolo
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Cantidad de sustancia	mol	mol
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Corriente eléctrica	ampere	A
Intensidad lumínica	candela	cd

de Unidades, abreviado SI, del francés *Système International d'Unités*.

A lo largo de este libro damos muchos ejemplos de unidades derivadas del SI, tales como velocidad, fuerza y resistencia eléctrica, que se desprenden de la tabla 1. Por ejemplo, la unidad SI de fuerza, llamada *newton* (abreviatura N), se define en función de las unidades básicas del SI así:

$$1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$$

tal como lo explicaremos con detalle en el capítulo 5.

Si expresamos propiedades físicas, como la producción de una central de energía o el intervalo de tiempo entre dos eventos nucleares en unidades SI, a menudo encontraremos números muy grandes o muy pequeños. Por conveniencia, la Conferencia General de Pesas y Medidas, en las reuniones sostenidas durante el periodo 1960-1975, recomendó los prefijos mostrados en la tabla 2. Así, podemos escribir la producción de una planta de energía eléctrica típica, 1.3×10^9 watt, como 1.3 gigawatt o 1.3 GW. De igual forma, podemos escribir un intervalo de tiempo de la dimensión encontrada a menudo en física nuclear, 2.35×10^{-9} segundos, como 2.35 nanosegundos o 2.35 ns. Los prefijos de factores mayores a la unidad se expresan en términos que provienen del griego, y los de factores menores a la unidad se expresan con términos de origen latino (excepto femto y atto, que provienen del danés).

Para reforzar la tabla 1 necesitamos siete juegos de procedimientos operacionales que nos digan cómo producir las siete unidades SI básicas en el laboratorio. Exploramos las de tiempo, longitud y masa en las tres secciones siguientes.

Otros dos sistemas principales de unidades compiten con el Sistema Internacional (SI). Uno es el sistema gaus-

* Véase "SI: The International System of Units," por Robert A. Nelson (American Association of Physics Teachers, 1981). La guía "oficial" de Estados Unidos para el sistema SI puede encontrarla en la Special Publication 330, de la National Bureau of Standards (edición 1986).

En México se dispone también de información similar en la norma oficial mexicana NOM-Z-1981, Sistema Internacional de Unidades (SI), editada por la Dirección General de Normas, de la Secretaría de Comercio y Fomento Industrial (SECOFI). (N. del T.)

TABLA 2 PREFIJOS DEL SI†

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa-	E	10^{-1}	deci-	d
10^{15}	peta-	P	10^{-2}	centi-	c
10^{12}	tera-	T	10^{-3}	mili-	m
10^9	giga-	G	10^{-6}	micro-	μ
10^6	mega-	M	10^{-9}	nano-	n
10^3	kilo-	k	10^{-12}	pico-	p
10^2	hecto-	h	10^{-15}	femto-	f
10^1	deca-	da	10^{-18}	atto-	a

† Los prefijos utilizados en este libro se señalan en bold o negritas.

siano, con el que se expresa mucha de la literatura de física; en este libro no usamos este sistema. El apéndice G da los factores de conversión a unidades SI.

El segundo es el sistema británico (todavía en uso diario en Estados Unidos), del cual las unidades básicas de la mecánica son longitud (pie), fuerza (libra), y tiempo (segundo). De nuevo el apéndice G proporciona los factores de conversión a unidades SI. En este libro usamos unidades SI, pero a veces damos los equivalentes británicos. Solamente en tres países [Myanmar (Birmania), Liberia y Estados Unidos] se usa otro sistema diferente al SI como el patrón nacional de medición aceptado.

Problema muestra 1 Cualquier cantidad física puede ser multiplicada por 1 sin cambiar su valor. Por ejemplo, 1 min = 60 s, de modo que 1 = 60 s/1 min; similarmente, 1 ft = 12 in, de modo que 1 = 1 ft/12 in. Usando los factores de conversión apropiados, halle (a) la velocidad en metros por segundo equivalente a 55 millas por hora, y (b) el volumen en centímetros cúbicos de un tanque que contiene 16 galones de gasolina.

Solución. (a) Para nuestros factores de conversión, necesitamos (véase apéndice G) 1 mi = 1609 m (de modo que 1 = 1609 m/1 mi) y 1 h = 3600 s (de modo que 1 = 1 h/3600 s). Entonces

$$\text{velocidad} = 55 \frac{\text{mi}}{\text{h}} \times \frac{1609\text{ m}}{1\text{ mi}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 25\text{ m/s.}$$

(b) Un galón fluido es igual a 231 pulgadas cúbicas, y 1 in. = 2.54 cm. Entonces

$$\text{volumen} = 16 \frac{\text{gal}}{\text{gal}} \times \frac{231\text{ in.}^3}{1\text{ gal}} \times \left(\frac{2.54\text{ cm}}{1\text{ in.}}\right)^3 = 6.1 \times 10^4\text{ cm}^3.$$

Nótese en estos dos cálculos cómo se insertan los factores de conversión de unidades, de modo que las unidades no deseadas aparezcan en el numerador y en el denominador y, por lo tanto, se cancelen.

1-3 EL PATRÓN DE TIEMPO*

La medición del tiempo tiene dos aspectos. Para propósitos cotidianos y para algunos de carácter científico, nece-

TABLA 3 ALGUNOS INTERVALOS DE TIEMPO MEDIDOS†

Intervalo de tiempo	Segundos
Duración de vida de un protón	$> 10^{40}$
Periodo de semidesintegración doble beta del ⁸² Se	3×10^{27}
Edad del universo	5×10^{17}
Edad de la pirámide de Keops	1×10^{11}
Vida media del ser humano (Estados Unidos)	2×10^9
Periodo de la órbita terrestre alrededor del Sol (1 año)	3×10^7
Periodo de rotación terrestre alrededor de su eje (1 día)	9×10^4
Periodo de la órbita de un satélite típico en órbita baja	5×10^3
Tiempo entre latidos normales del corazón	8×10^{-1}
Periodo del diapason de concierto (en "la")	2×10^{-3}
Periodo de oscilación de microondas de 3 cm	1×10^{-10}
Periodo típico de rotación de una molécula	1×10^{-12}
Pulsación de luz más corta producida (1990)	6×10^{-15}
Duración de vida de las partículas menos estables	$< 10^{-23}$

† Valores aproximados

sitamos saber la hora del día, de modo que podamos ordenar sucesivamente los acontecimientos. En la mayoría de los trabajos científicos precisamos saber cuánto dura un suceso (el intervalo de tiempo). Así pues, cualquier patrón de tiempo debe ser capaz de responder a las preguntas, "¿a qué hora ocurre?" y "¿cuánto dura?" La tabla 3 muestra el amplio margen de intervalos de tiempo que pueden medirse. Éstos varían por un factor de alrededor de 10^{63} .

* Para una historia de la medición del tiempo, véase *Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World*, por David S. Landes (Harvard University Press, 1983). Los desarrollos recientes en la cronomedición precisa se discuten en "Precise Measurement of Time," por Norman F. Ramsey, *American Scientist*, Enero-Febrero de 1988, pág. 42. Un listado de los diferentes sistemas para reportar el tiempo puede hallarse en "Time and the Amateur Astronomer," por Alan M. MacRobert, *Sky and Telescope*, Abril 1989, pág. 378.

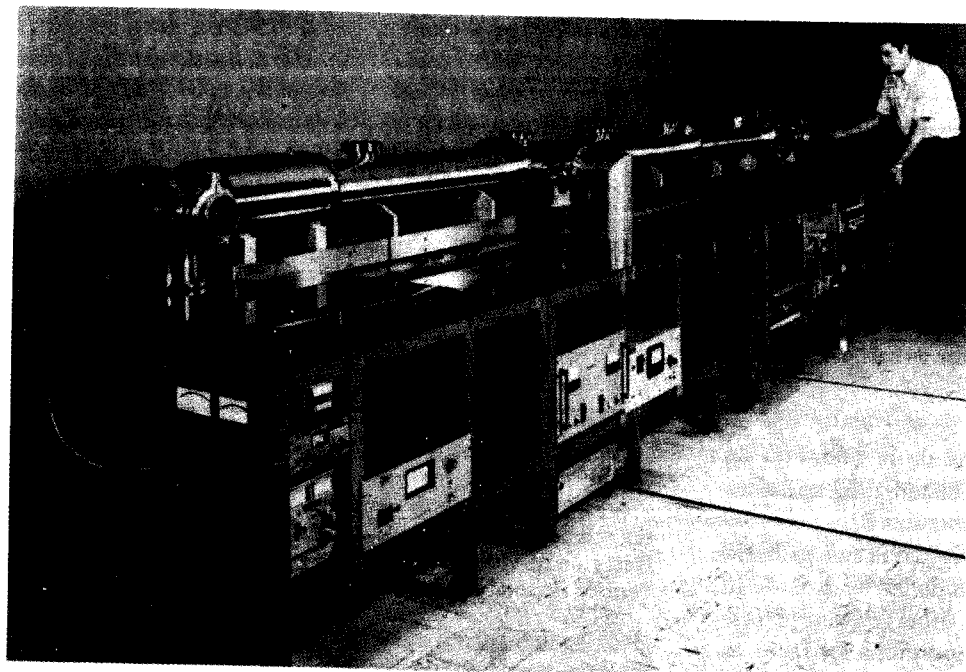


Figura 1 Patrón de frecuencia atómica de cesio Núm. NBS-6 del National Institute of Standards and Technology, en Boulder, Colorado. Éste es el patrón primario para la unidad de tiempo en Estados Unidos. Marque el teléfono (303)499-7111 para calibrar su reloj contra el patrón. Marque el (900)410-8463 para las señales de tiempo del Observatorio Naval de ese país.

Cualquier fenómeno que se repita a sí mismo puede utilizarse como una medición del tiempo. La medición se realiza contando dichas repeticiones e incluyendo las fracciones de ellas. Podríamos usar un péndulo que oscila, un sistema masa-resorte, o un cristal de cuarzo, por ejemplo. De los muchos fenómenos repetitivos en la naturaleza la rotación de la Tierra sobre su eje, que determina la longitud del día, fue usada durante siglos como un patrón de tiempo. Un segundo (solar medio) se define como $1/86,400$ de un día (solar medio).

Los relojes de cristal de cuarzo basados en las vibraciones periódicas de un cristal de cuarzo sostenidas eléctricamente sirven bien como patrones de tiempo secundarios. Un reloj de cuarzo puede ser calibrado contra la Tierra en rotación por medio de observaciones astronómicas y usado para medir el tiempo en el laboratorio. El mejor de éstos ha mantenido el tiempo por un año con un error acumulado máximo de $5 \mu\text{s}$, pero aun esta precisión no es suficiente en la ciencia y la tecnología modernas.

Para cumplir la necesidad de un patrón de tiempo mejor, se han desarrollado relojes atómicos en varios países. La figura 1 muestra un reloj así, basado en una frecuencia característica de la radiación de las microondas emitidas por átomos del elemento cesio. Este reloj, guardado en el National Institute of Standards and Technology, en Estados Unidos, constituye en ese país la base para el Tiempo Universal Coordinado (Coordinated Universal Time, UTC), por el cual se obtienen señales de tiempo en radios de onda corta (estaciones WWV y WWVH) y en el teléfono.

La figura 2 muestra, por comparación con un reloj de cesio, las variaciones en la tasa de rotación de la Tierra en

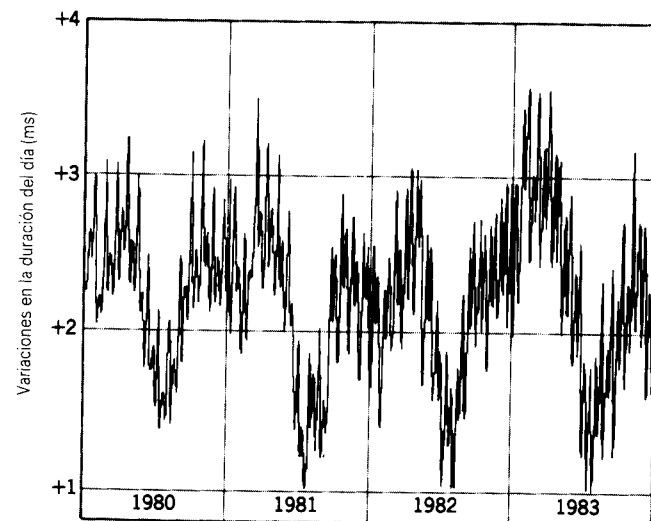


Figura 2 La variación en la longitud del día en un periodo de 4 años. Nótese que la escala vertical es de sólo $3 \text{ ms} = 0.003 \text{ s}$. Véase "The Earth's Rotation Rate," por John Wahr, *American Scientist*, Enero-Febrero 1985, p. 41.

un periodo de 4 años. Estos datos muestran lo pobre del patrón de tiempo que proporciona la rotación de la Tierra para un trabajo preciso. Las variaciones que vemos en la figura 2 pueden ser atribuidas a los efectos en las mareas causados por la Luna y a las variaciones estacionales en los vientos atmosféricos.

El segundo basado en el reloj de cesio fue adoptado como un patrón internacional por la 13a. Conferencia General de Pesas y Medidas de 1967, donde se dio la siguiente definición:

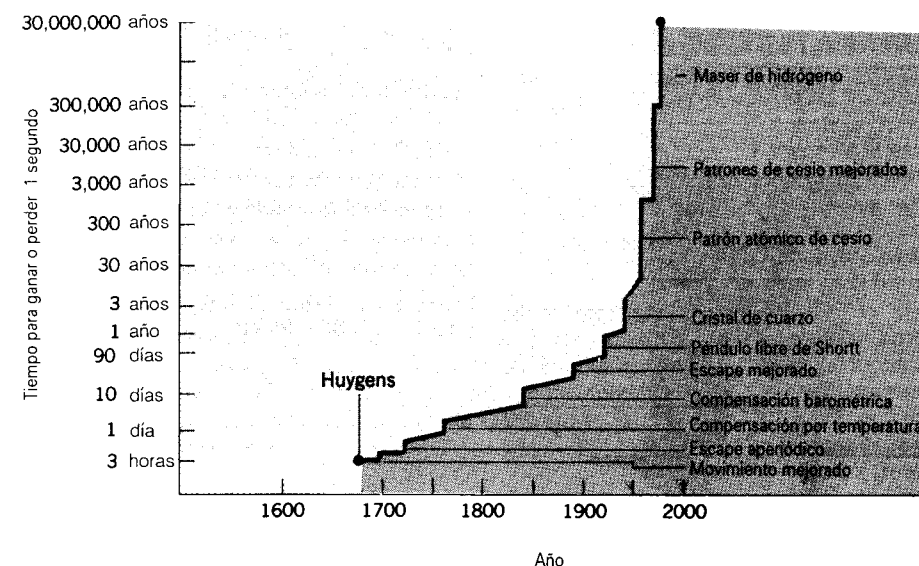


Figura 3 La mejora en cronometría a lo largo de los siglos. Los antiguos relojes de péndulo ganaron o perdieron un segundo cada unas cuantas horas; los relojes de maser de hidrógeno actuales lo harían sólo después de 30 millones de años.

Un segundo es el tiempo ocupado por 9,192,631,770 vibraciones de la radiación (de una longitud de onda específica) emitida por un átomo de cesio.

Dos relojes de cesio modernos podrían marchar durante 300,000 años antes de que sus lecturas difieran en más de 1 s. Se han obtenido relojes de maser* de hidrógeno con la increíble precisión de 1 s en 30 millones de años. Los relojes basados en un simple átomo atrapado pueden ser capaces de mejorar esta precisión en tanto como 3 órdenes de magnitud. La figura 3 muestra el impresionante registro de mejoras en la cronometría que han ocurrido en las pasados 300 años, comenzando con el reloj de péndulo, inventado por Christian Huygens en 1656, y terminando con el maser de hidrógeno de hoy día.

1-4 EL PATRÓN DE LONGITUD†

El primer patrón internacional de longitud fue una barra de una aleación de platino e iridio que se llamó el metro patrón, el cual fue guardado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas cerca de París. La distancia entre dos líneas finas grabadas cerca de los extremos de la barra, cuando ésta se mantenía a una temperatura de 0°C y soportada mecánicamente de una manera prescrita, fue definida como el metro. Históricamente, el metro se tomó como una diezmillonésima parte de la distancia entre el polo norte y el ecuador a lo largo de la línea del meridiano

* (N. del T.) El maser es un dispositivo de amplificación del sonido que usa un cristal de cianuro de potasio-cobalto para captar ondas de radio emitidas por objetos celestiales remotos.

† Véase "The New Definition of the Meter", por P. Giacomo, *American Journal of Physics*, Julio 1984, p. 607.

que pasa por París. Sin embargo, las mediciones más precisas demostraron que la barra del metro patrón difiere ligeramente (alrededor del 0.023%) del valor deseado.

A causa de que el metro patrón no es muy accesible, se hicieron copias maestras precisas de él y enviadas a los laboratorios de estandarización alrededor del mundo. Estos patrones secundarios fueron usados para calibrar otros patrones, aún más accesibles. Entonces, hasta hace poco, cada varilla o dispositivo de medición derivó su autoridad del metro patrón a través de una complicada cadena de comparaciones usando microscopios y máquinas divisoras. Desde 1959, ello sirvió también para la yarda, cuya definición legal en Estados Unidos adoptada en aquel año es como sigue:

$$1 \text{ yarda} = 0.9144 \text{ metros (exactamente)}$$

que es equivalente a

$$1 \text{ pulgada} = 2.54 \text{ centímetros (exactamente).}$$

La precisión con la cual pueden hacerse las intercomparaciones necesarias de la longitud por la técnica de comparar rayas finas usando un microscopio ya no es satisfactoria para la ciencia y la tecnología modernas. Un patrón de longitud más preciso y reproducible fue obtenido cuando el físico estadounidense Albert A. Michelson comparó en 1893 la longitud del metro patrón con la longitud de onda de la luz roja emitida por los átomos de cadmio. Michelson midió cuidadosamente la longitud de la barra metro y encontró que el metro patrón era igual a 1,553,163.5 de aquellas longitudes de onda. Lámparas de cadmio idénticas podían ser obtenidas fácilmente en cualquier laboratorio, y así Michelson encontró una manera de tener un patrón de longitud preciso en todo el mundo, para fines científicos, sin atenerse a la barra del metro patrón.

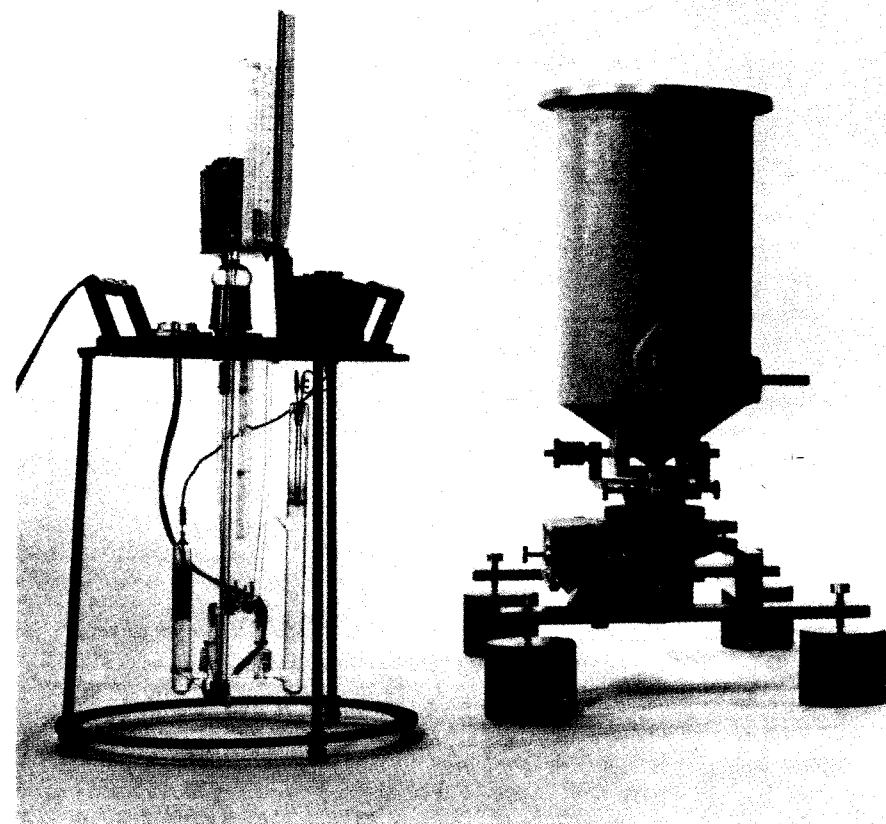


Figura 4 Una lámpara de criptón de los Laboratorios Nacionales de Física, en Teddington, Inglaterra. El tubo capilar de vidrio del aparato de la izquierda contiene el gas ^{86}Kr , el cual emite luz cuando es excitado por una corriente eléctrica. La lámpara está insertada en el criostato de la derecha, donde se mantiene a la temperatura del nitrógeno líquido (-210°C). La luz se ve a través de la pequeña portilla del criostato.

A pesar de este avance tecnológico, la barra de metal permaneció como el patrón oficial hasta 1960, cuando la 11a. Conferencia General de Pesas y Medidas adoptó un patrón atómico para el metro. Fue elegida la longitud de onda en el vacío de una cierta luz anaranjada emitida por átomos de un isótopo particular de criptón,* ^{86}Kr , en una descarga eléctrica (véase la figura 4). Específicamente, el metro se definió como 1,650,763.73 longitudes de onda de esta luz. Con la posibilidad de hacer mediciones de longitud de una fracción de una longitud de onda, los científicos pudieron usar este nuevo patrón para hacer comparaciones de longitudes con una precisión de menos de 1 parte en 10^9 .

La elección de un patrón atómico ofrece otras ventajas, además del aumento de la precisión en las mediciones de

longitud. Los átomos de ^{86}Kr se obtienen en cualquier parte, son idénticos, y emiten luz de la misma longitud de onda. La longitud de onda particular elegida es únicamente característica del ^{86}Kr y se halla definida de manera rigurosa y exacta. El isótopo puede obtenerse fácilmente en su forma pura.

Para 1983, las demandas de una precisión más alta habían llegado a tal punto que aun el patrón ^{86}Kr no podía cumplirlas y en aquel año se dio un paso audaz. El metro fue redefinido como la distancia recorrida por una onda de luz en un intervalo de tiempo especificado. En las palabras de la 17a. Conferencia General de Pesas y Medidas:

El metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de $1/299,792,458$ de segundo.

Esto es equivalente a decir que la velocidad de la luz c se define ahora como

$$c = 299,792,458 \text{ m/s (exactamente).}$$

Esta nueva definición del metro era necesaria porque las mediciones de la velocidad de la luz habían llegado a ser tan precisas que la reproducibilidad del metro ^{86}Kr mismo

eran el factor limitante. En vista de esto, tenía sentido adoptar la velocidad de la luz como una cantidad definida y usarla junto con el patrón de tiempo precisamente definido (el segundo) para redefinir el metro.

La tabla 4 muestra la gama de longitudes medidas que pueden ser comparadas con el patrón.

Problema muestra 2 Un año-luz es una medida de longitud (no una medida de tiempo) igual a la distancia que la luz recorre en un año. Calcular el factor de conversión entre años-luz y metros, y hallar la distancia a la estrella Centauro Próxima ($4.0 \times 10^{16} \text{ m}$) en años-luz.

Solución. El factor de conversión de años a segundos es de

$$1 \text{ año} = 1 \text{ año} \times \frac{365.25 \text{ d}}{1 \text{ año}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \\ = 3.16 \times 10^7 \text{ s.}$$

La velocidad de la luz es, con tres cifras significativas, $3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$. Entonces en un año la luz recorre una distancia de

$$(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(3.16 \times 10^7 \text{ s}) = 9.48 \times 10^{15} \text{ m,}$$

de modo que

$$1 \text{ año-luz} = 9.48 \times 10^{15} \text{ m.}$$

La distancia a Centauro Próxima es

$$(4.0 \times 10^{16} \text{ m}) \times \frac{1 \text{ año-luz}}{9.48 \times 10^{15} \text{ m}} = 4.2 \text{ años-luz}$$

La luz de Centauro Próxima tarda alrededor de 4.2 años en viajar a la Tierra.

1-5 EL PATRÓN DE MASA

El patrón SI de masa es un cilindro de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas al cual se le ha asignado, por acuerdo internacional, una masa de 1 kilogramo. Se envían patrones secundarios a laboratorios de estandarización en otros países y las masas de otros cuerpos pueden hallarse por la técnica de una balanza de brazos iguales con una precisión de 1 parte en 10^8 .

En Estados Unidos, una copia del patrón internacional de masa, conocido como kilogramo prototipo Núm. 20, se guarda en una bóveda del National Institute of Standards and Technology (véase la figura 5). Se le retira no más de una vez por año para comprobar los valores de patrones terciarios. Desde 1889 el prototipo Núm. 20 ha sido llevado a Francia dos veces para compararlo con el kilogramo maestro. Cuando se le retira de la bóveda siempre están presentes dos personas, una para transportar

TABLA 4 ALGUNAS LONGITUDES MEDIDAS†

Longitud	Metros
Distancia al cuásar más lejano observado	2×10^{26}
Distancia a la galaxia Andrómeda	2×10^{22}
Radio de nuestra galaxia	6×10^{19}
Distancia a la estrella más cercana (Centauro Próxima)	4×10^{16}
Radio medio de la órbita del planeta más distante (Plutón)	6×10^{12}
Radio del Sol	7×10^8
Radio de la Tierra	6×10^6
Altura del monte Everest	9×10^3
Altura de una persona promedio	2×10^0
Espesor de una página de este libro	1×10^{-4}
Tamaño de un virus típico	1×10^{-6}
Radio de un átomo de hidrógeno	5×10^{-11}
Radio efectivo de un protón	1×10^{-15}

† Valores aproximados

el kilogramo con un par de tenazas, y la segunda para sostener al kilogramo si la primera persona lo dejara caer.

La tabla 5 muestra algunas masas medidas. Nótese que varían por un factor de aproximadamente 10^{83} . La mayoría de las masas han sido medidas en términos del kilogramo patrón por métodos indirectos. Por ejemplo, podemos medir la masa de la Tierra (véase la sección 16-3) midiendo en el laboratorio la fuerza gravitatoria de atracción entre dos esferas de plomo y comparándola con la atracción de la Tierra sobre una masa conocida. Las masas de

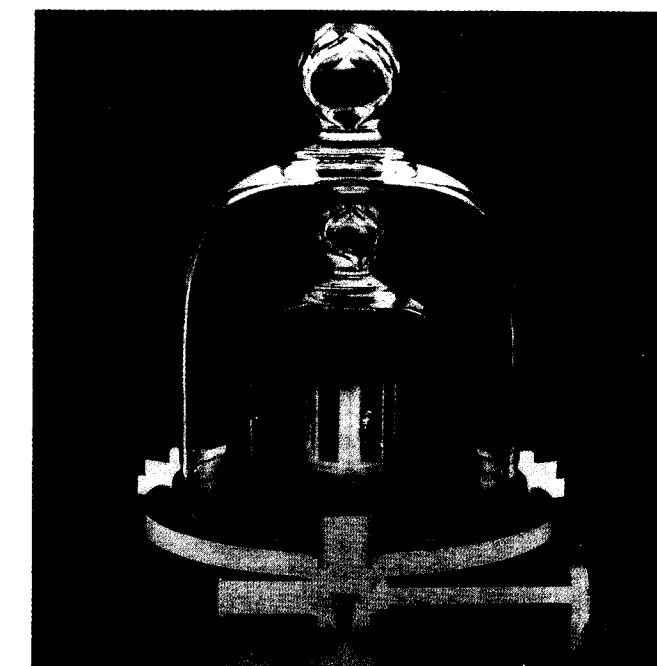


Figura 5 El kilogramo patrón Núm. 20, que se conserva bajo una campana de vidrio doble en el U. S. National Institute of Standards and Technology.

* El superíndice 86 del ^{86}Kr da el número de masa (el número de protones más neutrones en el núcleo) de este isótopo del criptón. El gas natural de criptón contiene isótopos con números de masa de 78, 80, 82, 83, 84, y 86. La longitud de onda de la radiación elegida difiere en estos isótopos distintos en alrededor de 1 parte en 10^5 , lo cual es inaceptablemente grande comparado con la precisión del patrón, alrededor de 1 parte en 10^9 . En el caso del reloj de cesio, existe sólo un isótopo natural del cesio, el cual tiene un número de masa de 133.

TABLA 5 ALGUNAS MASAS MEDIDAS†

Objeto	Kilogramos
Universo conocido (estimación)	10^{53}
Nuestra galaxia	2×10^{43}
El Sol	2×10^{30}
La Tierra	6×10^{24}
La Luna	7×10^{22}
Un trasatlántico	7×10^7
Un elefante	4×10^3
Una persona	6×10^1
Una uva	3×10^{-3}
Una partícula de polvo	7×10^{-10}
Un virus	1×10^{-15}
Una molécula de penicilina	5×10^{-17}
Un átomo de uranio	4×10^{-26}
Un protón	2×10^{-27}
Un electrón	9×10^{-31}

† Valores aproximados

las esferas deben conocerse por comparación directa con el kilogramo patrón.

En la escala atómica tenemos un segundo patrón de masa, que no es una unidad SI. Es la masa del átomo de carbono ^{12}C al que, por acuerdo internacional, se le ha asignado una masa atómica de 12 unidades de masa atómica unificada (abreviatura u), exactamente y por definición. Podemos hallar las masas de otros átomos con precisión considerable usando un espectrómetro de masa (figura 6; véase también la sección 34-2). La tabla 6 muestra alguna selección de masas atómicas, incluyendo las incertidumbres estimadas de la medición. Necesitamos un segundo patrón de masa porque las técnicas de laboratorio actuales nos permiten comparar las masas atómicas entre sí con mayor precisión de lo que podemos hacerlo hoy día contra el kilogramo patrón. Sin embargo, el desarrollo de un patrón de masa atómica para sustituir al kilogramo patrón está aún lejano. La relación entre el patrón atómico actual y el patrón primario es, aproximadamente,

$$1\text{ u} = 1.661 \times 10^{-27}\text{ kg.}$$

Una unidad SI relacionada es el *mol*, que mide la cantidad de una sustancia. Un mol de átomos de ^{12}C tiene una masa de 12 gramos exactamente y contiene un número de átomos numéricamente igual a la constante de Avogadro N_A :

$$N_A = 6.0221367 \times 10^{23}\text{ por mol.}$$

Éste es un número determinado experimentalmente, con una incertidumbre de alrededor de una parte en un millón. Un mol de cualquier otra sustancia contiene el mismo número de entidades elementales (átomos, moléculas, u otros). Entonces 1 mol de gas helio contiene N_A átomos de He, 1 mol de oxígeno contiene N_A moléculas de O_2 , y 1 mol de agua contiene N_A moléculas de H_2O .

Para relacionar una unidad de masa atómica con una unidad de volumen es necesario usar la constante de Avogadro. Sustituir el patrón kilogramo por un patrón atómico requerirá una mejora de cuando menos dos órdenes de magnitud en la precisión del valor medido de N_A para obtener masas con precisión de 1 parte en 10^8 .

1-6 PRECISIÓN Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Según vayamos mejorando la calidad de nuestros instrumentos de medición y la sofisticación de nuestras técnicas, podremos llevar a cabo experimentos a niveles de precisión siempre más elevados; esto es, podremos extender los resultados medidos a más y más *cifras significativas* y correspondientemente reducir la *incertidumbre experimental* del resultado. Tanto el número de cifras significativas como la incertidumbre dicen algo acerca de nuestra estimación de la precisión del resultado. Esto es, el resultado $x = 3\text{ m}$ implica que conocemos menos sobre x que del valor $x = 3.14159\text{ m}$. Al decir que $x = 3\text{ m}$, se sobreentiende que estamos razonablemente seguros de que x se halla entre 2 m y 4 m, mientras que si expresamos a x como 3.14159 m, significa que x probablemente se halla entre 3.14158 m y 3.14160 m. Si expresamos a x como 3 m cuando, de hecho, realmente creemos que x es 3.14159 m, estamos pasando por alto una información que puede ser importante. Por otra parte, si expresamos $x = 3.14159\text{ m}$, cuando realmente no tenemos base para saber nada más que $x = 3\text{ m}$, estamos de alguna manera tergiversando la verdad al afirmar que tenemos más información de la que realmente tenemos. La atención a las cifras significativas es importante cuando se presentan los resultados de las mediciones y de los cálculos, y tan erróneo es incluir demasiadas cifras como demasiado pocas.

Existen unas cuantas reglas sencillas a seguir para decidir cuántas cifras significativas se deben incluir:

Regla 1 Contar desde la izquierda sin tomar en cuenta los primeros ceros, y conservar todos los números hasta el primer número dudoso. Esto es, $x = 3\text{ m}$ tiene sólo una cifra significativa, y expresar este valor como $x = 0.003\text{ km}$ no cambia el número de cifras significativas. Si en su lugar escribimos $x = 3.0\text{ m}$ (o su equivalente, $x = 0.0030\text{ km}$), implicaríamos que conocemos el valor de x hasta dos cifras significativas. En particular, ¡no conviene escribir los 9 ó 10 dígitos de la pantalla de la calculadora si ello no se justifica por la precisión de los datos de entrada! En este texto la mayoría de los cálculos están hechos con dos ó tres cifras significativas.

Téngase cuidado con las anotaciones ambiguas: $x = 300\text{ m}$ no indica si existen una, dos, o tres cifras significativas; no sabemos si los ceros conllevan informa-

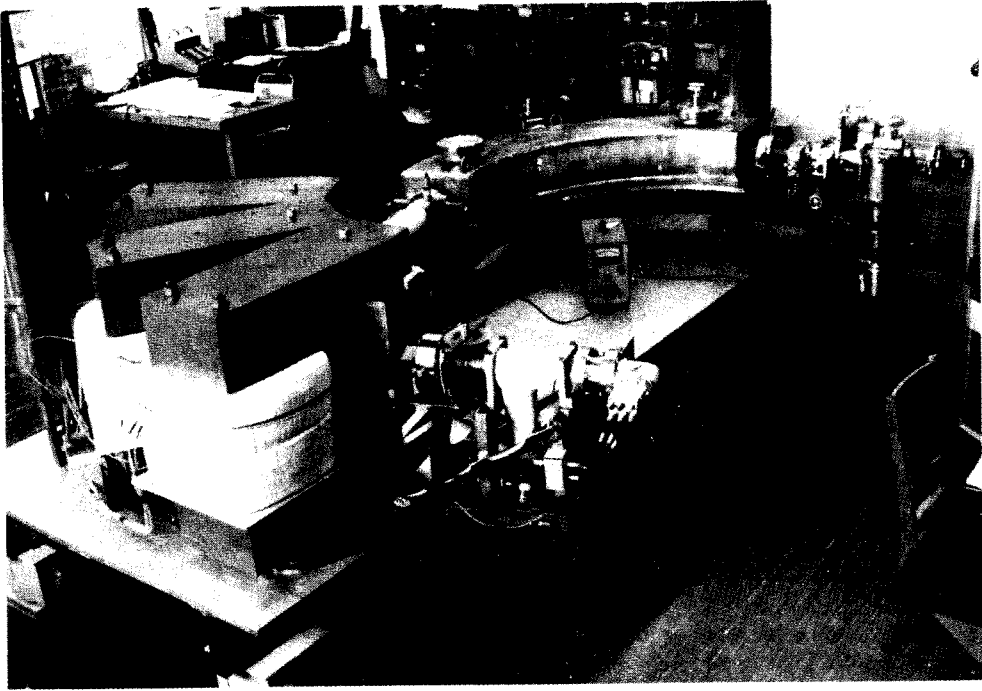


Figura 6 Espectrómetro de masa de alta resolución, en la Universidad de Manitoba. Los instrumentos de este tipo se usan para obtener masas atómicas precisas tales como las listadas en la tabla 6. El trabajo en este laboratorio se halla respaldado por el Consejo Nacional de Investigación (National Research Council), de Canadá.

TABLA 6 MEDIDAS DE ALGUNAS MASAS ATÓMICAS

Isótopo	Masa (u)	Incertidumbre (u)
^1H	1.00782504	0.00000001
^{12}C	12.00000000	(exactamente)
^{64}Cu	63.9297656	0.0000017
^{102}Ag	101.91195	0.00012
^{137}Cs	136.907073	0.000006
^{190}Pt	189.959917	0.000007
^{238}Pu	238.0495546	0.0000024

ción o simplemente sirven como ocupantes de un lugar. En cambio, deberíamos escribir $x = 3 \times 10^2$ ó 3.0×10^2 o 3.00×10^2 para especificar la precisión con mayor claridad.

Regla 2 Cuando se multiplica o se divide, conserve un número de cifras significativas en el producto o en el cociente no mayor al número de cifras significativas en el menos preciso de los factores. Es decir,

$$2.3 \times 3.14159 = 7.2$$

De vez en cuando, es necesario un poco de buen juicio cuando se aplica esta regla:

$$9.8 \times 1.03 = 10.1$$

porque, aun cuando 9.8 tiene técnicamente sólo dos cifras significativas, está muy cerca de ser un número con tres cifras significativas. El producto debería entonces estar expresado con tres cifras significativas.

Regla 3 Al sumar o al restar, el dígito menos significativo de la suma o de la diferencia ocupa la misma posición relativa que el dígito menos significativo de las cantidades que son sumadas o restadas. En este caso, el *número* de cifras significativas no es importante; la *posición* es lo que importa. Por ejemplo, supongamos que queremos hallar la masa total de tres objetos como sigue:

$$\begin{array}{r} 103.9\text{ kg} \\ 2.10\text{ kg} \\ 0.319\text{ kg} \\ \hline 106.319\text{ ó }106.3\text{ kg} \end{array}$$

Se muestra en **negritas** el dígito menos significativo o primero en duda. Según la regla 1, deberíamos incluir solamente un dígito dudoso; así, el resultado debería expresarse como 106.3 kg, ya que si el “3” es dudoso, entonces el “19” siguiente no nos da información y resulta inútil.

Problema muestra 3 Deseamos pesar nuestro gato, pero sólo disponemos de una báscula casera de plataforma ordinaria. Es una báscula digital, que muestra el peso en un número entero de libras. Usaremos, por lo tanto, el siguiente esquema: determinamos que nuestro propio peso es de 119 libras, y después tomamos con nosotros al gato y determinamos que nuestro peso combinado es de 128 libras. ¿Cuál es la incertidumbre fraccionaria o en porcentaje de nuestro peso y del peso del gato?

Solución El dígito menos significativo es el dígito de las unidades y, por lo tanto, nuestro peso tiene una incertidumbre de

una libra aproximadamente. Esto es, la báscula indicaría 119 lb para cualquier peso entre 118.5 lb y 119.5 lb. La incertidumbre fraccionaria es, por lo tanto, de

$$\frac{1 \text{ lb}}{119 \text{ lb}} = 0.008 \text{ ó } 0.8\%$$

El peso del gato es de 128 lb - 119 lb = 9 lb. Sin embargo, la incertidumbre en el peso del gato es todavía alrededor de 1 lb, de modo que la incertidumbre fraccionaria será de

$$\frac{1 \text{ lb}}{9 \text{ lb}} = 0.11 = 11\%$$

Si bien la incertidumbre *absoluta* en nuestro peso y en el peso del gato es la misma (1 lb), la incertidumbre *relativa* en nuestro peso es un orden de magnitud más pequeña que la incertidumbre relativa en el peso del gato. Si tratásemos de pesar un gatito de 1 lb por este método, la incertidumbre relativa en su peso sería del 100%. Esto ilustra un peligro que ocurre comúnmente en la resta de dos miembros que son casi iguales: la incertidumbre relativa o el porcentaje de incertidumbre en la diferencia puede ser muy grande.

1-7 ANÁLISIS DIMENSIONAL

Asociada con cada cantidad medida o calculada hay una *dimensión*. Por ejemplo, tanto la absorción del sonido en un recinto cerrado como la probabilidad de que ocurran reacciones nucleares tienen las dimensiones de un área. Las unidades en las que se expresan las cantidades no afectan la dimensión de las cantidades: un área sigue siendo un área, esté expresada en m² o en pies² o en acres, o en sabinos (unidad de absorción acústica), o en barns (reacciones nucleares).

De igual manera que definimos a nuestros patrones de medición anteriormente en este capítulo como cantidades fundamentales, podemos elegir un juego de dimensiones fundamentales basadas en patrones de medición independientes. En cantidades mecánicas, masa, longitud, y tiempo son elementales e independientes, así que pueden servir como dimensiones fundamentales. Están representadas respectivamente por M, L, y T.

Toda ecuación debe ser *dimensionalmente compatible*, esto es, las dimensiones en ambos lados deben ser las mismas. La atención a las dimensiones puede a menudo evitar que se cometan errores al escribir las ecuaciones. Por ejemplo, la distancia x cubierta en un tiempo t por un objeto que comienza desde el reposo y que al moverse, está sometido a una aceleración constante a , será, según demostraremos en el capítulo siguiente, $x = \frac{1}{2}at^2$. La aceleración se mide en unidades de m/s². Usamos paréntesis angulares [] para denotar “la dimensión de”, de modo que $[x] = L$ o $[t] = T$. Se deduce que $[a] = L/T^2$ o LT^{-2} . Manteniendo las unidades (y, por tanto la dimensión) de la aceleración que deseamos, nunca caeremos en el error de escribir $x = \frac{1}{2}at$, o bien $x = \frac{1}{2}at^3$.

El análisis de las dimensiones puede a menudo ayudar en el trabajo con ecuaciones. Los dos ejemplos muestra siguientes ilustran este procedimiento.

Problema muestra 4 Para mantener a un objeto que se mueve en círculo a velocidad constante se requiere una fuerza llamada “fuerza centrípeta”. (El movimiento circular se estudia en el capítulo 4.) Haga un análisis dimensional de la fuerza centrípeta.

Solución Comencemos por preguntar “¿de cuántas variables mecánicas podría depender la fuerza centrípeta F ?” El objeto en movimiento tiene sólo tres propiedades que son igualmente importantes: su masa m , su velocidad v , y el radio r de su trayectoria circular. La fuerza centrípeta F deberá darse, aparte de cualesquiera constantes sin dimensión, por una ecuación de la forma

$$F \propto m^a v^b r^c$$

donde el símbolo $\propto$ significa que “es proporcional a”, y a , b y c son exponentes numéricos que deben ser determinados por el análisis de las dimensiones. Como escribimos en la sección 1-2 (y como se estudiará en el capítulo 5), la fuerza tiene unidades de kg · m/s² y, por lo tanto, sus dimensiones son $[F] = MLT^{-2}$. Podemos, por lo tanto, escribir la ecuación de la fuerza centrípeta en función de sus dimensiones así:

$$\begin{aligned} [F] &= [m^a] [v^b] [r^c] \\ MLT^{-2} &= M^a (L/T)^b L^c \\ &= M^a L^{b+c} T^{-b} \end{aligned}$$

La consistencia dimensional significa que las dimensiones fundamentales deben ser las mismas en cada lado. Así, ponemos en la ecuación los exponentes,

$$\begin{aligned} \text{exponentes de M:} \quad & a = 1; \\ \text{exponentes de T:} \quad & b = 2; \\ \text{exponentes de L:} \quad & b + c = 1, \text{ de modo que } c = -1. \end{aligned}$$

La expresión resultante es

$$F \propto \frac{mv^2}{r}$$

La expresión real para la fuerza centrípeta, derivada de las leyes de Newton y de la geometría del movimiento circular, es $F = mv^2/r$. ¡El análisis dimensional nos da la dependencia exacta de las variables mecánicas! Esto es un acontecimiento feliz, en verdad porque el análisis dimensional no puede decirnos nada con respecto a las constantes que no tienen dimensión. En este caso sucede que la constante es 1.

Problema muestra 5 Un hito importante en la evolución del universo, justo después de la Gran Explosión es el tiempo Planck t_p , cuyo valor depende de tres constantes fundamentales: (1) la velocidad de la luz (la constante fundamental de la relatividad), $c = 3.00 \times 10^8$ m/s; (2) la constante de gravitación

de Newton (la constante fundamental de la gravedad), $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³/s² · kg; y (3) la constante de Planck (la constante fundamental de la mecánica cuántica), $h = 6.63 \times 10^{-34}$ kg · m²/s. Con base en un análisis dimensional, halle el valor del tiempo Planck.

Solución Usando las unidades dadas para las tres constantes, podemos obtener sus dimensiones:

$$[c] = [m/s] = LT^{-1}$$

$$[G] = [m^3/s^2 \cdot kg] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

$$[h] = [kg \cdot m^2/s] = ML^2 T^{-1}$$

Hagamos que el tiempo Planck dependa de estas constantes:

$$t_p \propto c^i G^j h^k,$$

donde i , j y k son exponentes a determinar. Las dimensiones de esta expresión son:

$$\begin{aligned} [t_p] &= [c^i] [G^j] [h^k] \\ T &= (LT^{-1})^i (L^3 T^{-2} M^{-1})^j (ML^2 T^{-1})^k \\ &= L^{i+3j+2k} T^{-i-2j-k} M^{-j+k} \end{aligned}$$

Igualando las potencias en ambos lados nos da

$$\text{exponentes de L: } 0 = i + 3j + 2k$$

$$\text{exponentes de T: } 1 = -i - 2j - k$$

$$\text{exponentes de M: } 0 = -j + k$$

y resolviendo estas tres ecuaciones para las tres incógnitas, hallamos que

$$i = -\frac{1}{2}, \quad j = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

Así,

$$t_p \propto c^{-5/2} G^{1/2} h^{1/2}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg})(6.63 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^5}} \\ &= 1.35 \times 10^{-43} \text{ s.} \end{aligned}$$

Como se ha definido comúnmente, el tiempo Planck difiere de este valor por un factor de $(2\pi)^{-1/2}$. Tales factores sin dimensión no pueden hallarse por medio de esta técnica.

De manera similar, podemos determinar la longitud Planck y la masa Planck, las cuales tienen también interpretaciones muy fundamentales (véanse los problemas 41 y 42).

PREGUNTAS

- “Una vez que hemos adoptado un patrón, por el simple hecho de ser un ‘patrón’ ya es invariable. ¿Cómo criticaría usted esta aseveración?”
- Enliste otras características, además de la accesibilidad y la invariabilidad, que se consideren deseables como patrón físico.
- ¿Puede usted imaginar un sistema de unidades básicas (tabla 1) en el que no se incluya el tiempo?
- De las siete unidades básicas enlistadas en la tabla 1, sólo una (el kilogramo) tiene un prefijo (véase la tabla 2). ¿Sería conveniente redefinir la masa de ese cilindro de platino-iridio en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas como 1 g en lugar de 1 kg?
- ¿Qué significa el prefijo “micro” en el concepto “horno de microondas”? Se ha propuesto que los alimentos que han sido irradiados con rayos gamma para prolongar su vida en la estantería lleven una marca que indique que han sido sometidos a picoondas. ¿Qué se supone que significa esto?
- Muchos investigadores calificados, basándose en la evidencia, creen en la realidad de la percepción extrasensorial. Suponiendo que la PES sea realmente un hecho natural, ¿qué cantidad o cantidades físicas buscaría para definir o describir este fenómeno cuantitativamente?
- Según el punto de vista adoptado por algunos físicos y filósofos, si no podemos describir los procedimientos para determinar una cantidad física decimos que la cantidad no es detectable y debería abandonarse por no tener una realidad física. No todos los científicos aceptan este punto de vista. En su opinión, ¿cuáles son los méritos e inconvenientes de este punto de vista?
- Nombre varios fenómenos repetitivos que ocurren en la naturaleza y que sirvan como patrones de tiempo razonables.
- ¿Podría definirse “1 segundo” como una pulsación del actual presidente de la Asociación Americana de Profesores de Física? Galileo usó su pulso como un dispositivo de tiempo en alguno de sus trabajos. ¿Por qué es mejor una definición basada en el reloj atómico?
- ¿Qué criterios debe satisfacer un buen reloj?
- Por lo que usted sabe sobre los péndulos, cite los inconvenientes de usar el periodo de un péndulo como patrón de tiempo.
- El 30 de junio de 1981 el minuto que transcurrió entre las 10:59 y las 11:00 de la mañana fue arbitrariamente alargado para contener 61 s. El último día de 1989 fue también prolongado en 1 s. Un *segundo intercalado* así se introduce a veces para compensar el hecho de que, medida por nuestro patrón atómico de tiempo, la velocidad de rotación

- de la Tierra decrece lentamente. ¿Por qué es deseable ajustar nuestros relojes de este modo?
13. Una estación de radio se anuncia "en el 89.5 de su carátula de FM". ¿Qué significa este número?
14. ¿Por qué no hay unidades básicas para área y para volumen en el sistema SI?
15. El metro fue originalmente una diezmillonésima parte de la distancia del Polo Norte al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por París. Esta definición no coincide con la barra del metro patrón en un 0.023%. ¿Significa esto que la barra del metro patrón es imprecisa en ese porcentaje?
16. ¿Puede la longitud medirse a lo largo de una línea curva? Si se puede, ¿cómo?
17. Cuando la barra metro fue adoptada como el patrón de longitud, se especificó su temperatura. ¿Puede ser llamada la longitud una propiedad fundamental si otra cantidad física, como es la temperatura, debe especificarse para elegir un patrón?
18. Al redefinir al metro en función de la velocidad de la luz, ¿por qué los delegados a la Conferencia General de Pesas y Medidas de 1983 no simplificaron el asunto definiendo que la velocidad de la luz es de 3×10^8 m/s exactamente? Por lo mismo, ¿por qué no definieron que es de 1 m/s exactamente? ¿Estaban abiertas para ellos ambas posibilidades de hacerlo? De ser así, ¿por qué las rechazaron?
19. Sugiera una manera de medir (a) el radio de la Tierra, (b) la distancia entre el Sol y la Tierra y (c) el radio del Sol.

PROBLEMAS

Sección 1-2 El Sistema Internacional de Unidades

1. Use los prefijos de la tabla 2 para expresar (a) 10^6 teléfonos; (b) 10^{-6} teléfonos; (c) 10^1 tarjetas; (d) 10^9 esquilonos; (e) 10^{12} toros; (f) 10^{-1} compañeros; (g) 10^{-2} pezuñas; (h) 10^{-9} Nannettes; (i) 10^{-12} rechiflas; (j) 10^{-18} muchachos; (k) 2×10^2 asociados; (l) 2×10^3 cenizontles. Ahora que ya percibió la idea, invente unas cuantas expresiones similares. (Véase la pág. 61 de *A Random Walk in Science*, compilado por R. L. Weber; Crane, Russak & Co., Nueva York, 1974.)
2. Algunos de los prefijos de las unidades SI se han infiltrado en el lenguaje cotidiano. (a) ¿Cuál es el equivalente semanal de un salario anual de 36K (= 36 k\$)? (b) Una lotería ofrece 10 megadólares como premio mayor, pagadero durante 20 años. ¿Por cuánto es el cheque recibido cada mes? (c) El disco duro de una computadora tiene una capacidad de 30 MB (= 30 megabytes o millones de caracteres). A razón de 8 caracteres/palabra, ¿cuántas palabras puede almacenar? En términos de computación, kilo significa 1024 (= 2^{10}), no 1000.

20. Sugiera una manera de medir (a) el espesor de una hoja de papel, (b) el espesor de la pared de una burbuja de jabón y (c) el diámetro de un átomo.
21. Si alguien le dijera que cada dimensión de cada objeto se había contraído a la mitad de su valor original durante la noche, ¿cómo podría usted refutar tal aseveración?
22. ¿Es el patrón kilogramo de masa actual accesible, invariable, reproducible e indestructible? ¿Es sencillo para efectos de comparación? ¿Sería mejor un patrón atómico en todos los aspectos? ¿Por qué no adoptamos un patrón atómico, como lo hacemos para la longitud y el tiempo?
23. ¿Por qué hallamos útil tener dos patrones de masa, el kilogramo y el átomo de ^{12}C ?
24. Cómo obtener la relación entre las masas del kilogramo patrón y del átomo de ^{12}C ?
25. Sugiera modos prácticos por los cuales puedan ser determinadas las masas de los diversos objetos listados en la tabla 5.
26. Sugiera objetos cuyas masas entren, dentro de la amplia gama de la tabla 5, entre la de un trasatlántico y la Luna, y calcule sus masas.
27. Las críticas sobre el sistema métrico a menudo opacan su adopción diciendo cosas tales como: "En vez de comprar 1 lb de mantequilla tendrás ahora que pedir 0.454 kg de mantequilla". El argumento es que la vida será, de esta manera, más complicada. ¿Cómo podría usted rebatir esto?

Sección 1-3 El patrón de tiempo

3. Enrico Fermi dijo una vez que el periodo de una clase estándar (50 min) es de cerca de 1 microcenturia. ¿Qué tan larga es una microcenturia en minutos, y cuál es la diferencia porcentual con la aproximación de Fermi?
4. Nueva York dista de Los Angeles aproximadamente 3000 mi; la diferencia de tiempo entre estas dos ciudades es de 3 h. Calcule la circunferencia de la Tierra.
5. Una sustitución conveniente del número de segundos en un año es $\pi \times 10^7$. Dentro de qué porcentaje de error es esto correcto?
6. Poco después de la Revolución Francesa y como parte de la introducción del sistema métrico, la Convención Nacional Revolucionaria hizo un intento por introducir el tiempo decimal. En este plan, que no tuvo éxito, el día (comenzando a la media noche) se dividió en 10 horas decimales que constaban de 100 minutos decimales cada una. Las manecillas de un reloj decimal de bolsillo que aún se conserva están detenidas en 8 horas decimales, 22.8 minutos decimales. ¿Qué hora es? Véase la figura 7.

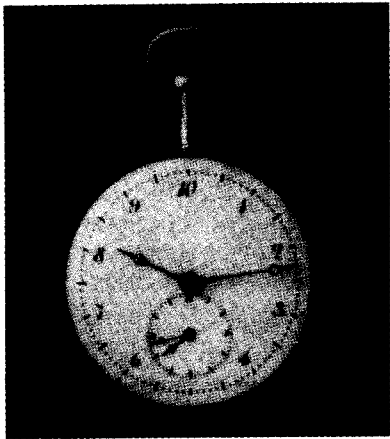


Figura 7 Problema 6.

7. (a) Una unidad de tiempo a veces usada en la física microscópica es el *trémolo*. Un trémolo es igual a 10^{-8} s. ¿Hay más trémolos en un segundo que segundos en un año? (b) El ser humano ha existido desde hace 10^6 años, mientras que el universo tiene una edad de 10^{10} años aproximadamente. Si la edad del universo fuera de 1 día, ¿cuántos segundos de existencia tendría el ser humano?
8. En dos carriles *diferentes*, los ganadores de la carrera de una milla hicieron un tiempo de 3 min 58.05 s y 3 min 58.20 s, respectivamente. Con objeto de concluir que el corredor con el tiempo más corto fue realmente más rápido, ¿cuál es el error máximo tolerable, en pies, al determinar las distancias?
9. Un cierto reloj de péndulo (con una carátula de 12 h) se adelanta 1 min/día. Después de poner el reloj en la hora correcta, cuánto tiempo debemos esperar hasta que indique nuevamente la hora correcta?
10. En un laboratorio están siendo probados cinco relojes. Exactamente al mediodía, determinado por la señal de tiempo de la WWV, en los días sucesivos de una semana los relojes indican lo que se muestra en la tabla inferior. ¿Cómo podrían disponerse estos cinco relojes en el orden de su valor relativo como buenos cronómetros? Justifique la elección.
11. La edad del universo es de alrededor de 5×10^{17} s; la pulsación de luz más corta producida en un laboratorio (1990) duró sólo 6×10^{-15} s (véase la tabla 3). Identifique un intervalo de tiempo físicamente significativo de aproximadamente la mitad de estos dos tiempos en una escala logarítmica.

Reloj	Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Jue.	Vie.	Sáb.
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

12. Suponiendo que la longitud del día crezca uniformemente 0.001 s en un siglo, calcule el efecto acumulativo sobre la medición del tiempo en 20 siglos. Tal disminución de la rotación de la Tierra está indicada por observaciones de la frecuencia que ocurren los eclipses solares durante este periodo.
13. El tiempo que tarda la Luna en regresar a una posición determinada según se observa contra el fondo de las estrellas fijas, 27.3 días, se llama *mes sideral*. El intervalo de tiempo entre fases idénticas de la Luna se llama *mes lunar*. El mes lunar es más largo que el mes sideral. ¿Por qué y por cuánto?

Sección 1-4 El patrón de longitud

14. Un muchacho francés, Pierre, que se cartea con otro muchacho de Estados Unidos, John, escribe a éste diciéndole que mide 1.9 m de altura. ¿Cuál es su altura en unidades inglesas?
15. (a) En las pistas de carreras se usan tanto 100 yardas como 100 metros como distancias para carreras cortas y rápidas. ¿Cuál es más larga? ¿Por cuántos metros es más larga? ¿Por cuántos pies? (b) ¿Se mantienen registros de pista y campo para la milla y para la llamada milla métrica (1500 metros). Compare estas distancias.
16. La estabilidad del reloj de cesio usado como un patrón atómico del tiempo es tal que dos relojes de cesio adelantarán o atrasarán 1 s uno con respecto al otro en alrededor de 300,000 años. Si esta misma precisión fuera aplicada a la distancia entre Nueva York y San Francisco (2572 mi), ¿en cuánto se diferenciarían las mediciones sucesivas de esta distancia?
17. La Antártida tiene una forma casi semicircular con un radio de 2000 km. El espesor promedio de la capa de hielo es de 3000 m. ¿Cuántos centímetros cúbicos de hielo contiene la Antártida? (Desprecie la curvatura de la Tierra.)
18. Una unidad de área, a menudo usada al expresar áreas de terreno, es la *hectárea*, que se define como 10^4 m². Una mina de carbón a cielo abierto consume 77 hectáreas de terreno con una profundidad de 26 m cada año. ¿Qué volumen de tierra, en kilómetros cúbicos, es retirada en este tiempo?
19. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.37×10^6 m. (a) ¿Cuál es su circunferencia en kilómetros? (b) ¿Cuál es su área superficial en kilómetros cuadrados? (c) ¿Cuál es su volumen en kilómetros cúbicos?
20. A continuación se dan las velocidades máximas aproximadas de varios animales, pero en unidades de velocidad diferentes. Convierta estos datos a m/s, y después dispon-

ga a los animales en orden creciente de su velocidad máxima: la ardilla, 19 km/h; el conejo, 30 nudos; el caracol, 0.030 mi/h; la araña, 1.8 pies/s; el leopardo, 1.9 km/min; un ser humano, 1000 cm/s; el zorro, 1100 m/min; el león, 1900 km/día.

21. Cierta vehículo espacial tiene una velocidad de 19,200 mi/h. ¿Cuál es su velocidad en años-luz por siglo?
22. Un automóvil nuevo está equipado con un tablero de instrumentos de "tiempo real" que incluye el consumo de combustible. Un interruptor permite al conductor cambiar a voluntad entre unidades británicas y unidades SI. Sin embargo, la representación británica muestra mi/gal mientras que la versión SI lo hace a la inversa, L/km. ¿Qué lectura SI corresponde a 30.0 mi/gal?
23. Las distancias astronómicas son tan grandes comparadas con las terrestres que se emplean unidades de longitud mucho mayores para facilitar la comprensión de las distancias relativas de los objetos astronómicos. Una *unidad astronómica* (UA) es igual a la distancia promedio de la Tierra al Sol, 1.50×10^8 km. Un *parsec* (pc) es la distancia a la cual 1 UA subtendería un ángulo de 1 segundo de arco. Un *año-luz* (al) es la distancia que la luz cubriría en 1 año, viajando a través del vacío a una velocidad de 3.00×10^8 km/s. (a) Exprese la distancia de la Tierra al Sol en parsecs y en años-luz. (b) Exprese un año-luz y un parsec en kilómetros. Aunque el año-luz se usa mucho en la escritura popular, el parsec es la unidad usada profesionalmente por los astrónomos.
24. El radio efectivo de un protón es de alrededor 1×10^{-15} m; el radio del universo observable (dado por la distancia al cuásar observable más lejano) es de 2×10^{26} (véase la tabla 4). Identifique una distancia físicamente significativa que sea aproximadamente la mitad entre estos dos extremos en una escala logarítmica.
25. La distancia promedio entre el Sol y la Tierra es de 390 veces la distancia promedio entre la Luna y la Tierra. Consideremos ahora un eclipse total de Sol (la Luna entre la Tierra y el Sol; véase la figura 8) y calcule (a) la relación entre los diámetros del Sol y de la Luna, y (b) la razón entre los volúmenes del Sol y de la Luna. (c) El ángulo interceptado en el ojo por la Luna es de 0.52° y la distancia entre la Tierra y la Luna es de 3.82×10^5 km. Calcule el diámetro de la Luna.

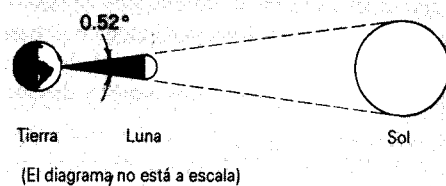


Figura 8 Problema 25.

26. El navegante del buque petrolero *Exxon Valdez* usa los satélites del Sistema de ubicación global (GPS/NAVSTAR) para hallar la latitud y la longitud (véase la figura

9). Éstas son de $43^\circ 36'25.3''$ N y $77^\circ 31'48.2''$ W. Si la precisión de estas determinaciones es de $\pm 0.5''$, ¿cuál es la incertidumbre en la posición del petrolero medida a lo largo de (a) una línea norte-sur (meridiano de longitud) y (b) una línea este-oeste (paralelo de latitud)? (c) ¿Dónde está el petrolero?

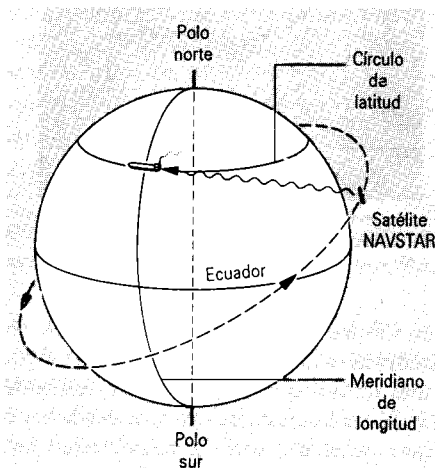


Figura 9 Problema 26.

Sección 1-5 El patrón de masa

27. Usando las conversiones y los datos que aparecen en el capítulo, determine el número de átomos de hidrógeno necesario para obtener 1.00 kg de hidrógeno.
28. Una molécula de agua (H_2O) contiene dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno. Un átomo de hidrógeno tiene una masa de 1.0 u y un átomo de oxígeno tiene una masa de 16 u. (a) ¿Cuál es la masa en kilogramos de una molécula de agua? (b) ¿Cuántas moléculas de agua hay en los océanos del mundo? Los océanos tienen una masa total de 1.4×10^{21} kg.
29. En el continente europeo una "libra" es medio kilogramo. ¿Cuál es mejor compra, una libra de café en París por \$3.00, o una libra de café en Nueva York por \$2.40?
30. Una sala tiene las dimensiones 21 ft $\times$ 13 ft $\times$ 12 ft. ¿Cuál es la masa de aire que contiene? La densidad del aire a la temperatura ambiente y la presión atmosférica normal es de 1.21 kg/m³.
31. La longitud del borde de un terrón de azúcar típico es de 1 cm. Si usted tuviera una caja cúbica conteniendo 1 mol de cubos de azúcar, ¿cuál sería la longitud de su borde?
32. Una persona sometida a dieta pierde 2.3 kg (correspondientes a unas 5 lb) por semana. Exprese la tasa de pérdida de masa en miligramos por segundo.
33. Supongamos que nos toma 12 h drenar un recipiente con 5700 m³ de agua. ¿Cuál es la tasa del flujo de masa (en kg/s) de agua del recipiente? La densidad del agua es de 1000 kg/m³.
34. Los granos de arena fina de una playa de California tienen un radio promedio de 50 μ m. ¿Qué masa de arena tendría

agua que, en un tiempo t , se mueve a través de un área A de la sección transversal del manto acuífero está dado por

$$\frac{V}{t} = KA \frac{H}{L},$$

donde H es el declive del manto acuífero a lo largo de la distancia horizontal L (véase la figura 10). Esta relación se llama ley de Darcy. La cantidad K es la conductividad hidráulica del manto acuífero. ¿Cuáles son las unidades SI de K ?

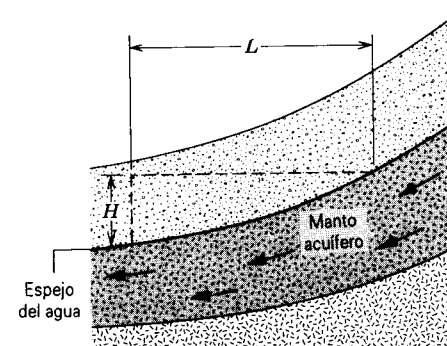


Figura 10 Problema 40

un área total de su superficie igual al área de la superficie de un cubo que tenga exactamente 1 m de arista? La arena es un bióxido de silicio, 1 m³ de la cual tiene una masa de 2600 kg.

35. El kilogramo patrón (véase la figura 5) tiene la forma de un cilindro circular con su altura igual a su diámetro. Demuestre que, en un cilindro circular del volumen fijado, esta igualdad da el área superficial más pequeña, haciendo así mínimos los efectos de la contaminación y el desgaste de la superficie.
36. La distancia entre átomos vecinos, o entre moléculas, de una sustancia sólida puede ser estimada calculando al doble el radio de una esfera con un volumen igual al volumen por átomo del material. Calcule la distancia entre átomos vecinos en (a) el hierro, y (b) el sodio. Las densidades del hierro y del sodio son de 7870 kg/m³ y 1013 kg/m³, respectivamente; la masa de un átomo de hierro es de 9.27×10^{-26} kg, y la masa de un átomo de sodio es de 3.82×10^{-26} kg.

Sección 1-6 Precisión y cifras significativas

37. En el periodo 1960-1983, se definió que el metro tenía 1,650,763.73 longitudes de onda de una cierta luz anaranjada emitida por átomos de criptón. Calcule la distancia en nanómetros que corresponde a una longitud de onda. Exprese el resultado usando el número apropiado de cifras significativas.
38. (a) Evalúe $37.76 + 0.132$ con el número correcto de cifras significativas. (b) Evalúe $16.264 - 16.26325$ con el número correcto de cifras significativas.
39. Una placa rectangular de metal tiene una longitud de 8.43 cm y una anchura de 5.12 cm. Calcule el área de la placa con el número correcto de cifras significativas. (b) Una placa circular de metal tiene un radio de 3.7 cm. Calcule el área de la placa con el número correcto de cifras significativas.

Sección 1-7 Análisis dimensional

40. La roca porosa a través de la cual se mueve el agua subterránea es llamada manto acuífero. El volumen V de

41. En el problema muestra 5, las constantes h , G , y c fueron combinadas para obtener una cantidad de las dimensiones de tiempo. Repita la derivación para obtener una cantidad con las dimensiones de longitud, y evalúe el resultado numéricamente. No tome en cuenta ninguna constantes sin dimensión. Ésta es la *longitud Planck*, es decir, el tamaño del universo observable en el tiempo Planck.
42. Repita el procedimiento del problema 41 para obtener una cantidad con las dimensiones de masa. Esto da la *masa Planck*, es decir, la masa del universo observable en el tiempo Planck.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECAS
MONTEVIDEO - URUGUAY

054353

CAPÍTULO 2

MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL

La mecánica, la más antigua de las ciencias físicas, es el estudio del movimiento de los objetos. El cálculo de la trayectoria de una bola de béisbol o de una sonda espacial enviada a Marte figuran entre los problemas de los que se ocupa, así como el análisis de la trayectoria de las partículas elementales que se forman en las colisiones en nuestros grandes aceleradores. Cuando describimos el movimiento, estamos tratando la parte de la mecánica llamada cinemática (del griego kinema, que significa movimiento, y de donde viene también “cinema”). Cuando analizamos las causas del movimiento entramos en el terreno de la dinámica (de la palabra griega dynamis, fuerza, como en “dinamita”). En este capítulo, trataremos únicamente de la cinemática en una dimensión. Los dos capítulos siguientes extienden estos resultados a dos y a tres dimensiones, y en el capítulo 5 iniciaremos el estudio de la dinámica.

2-1 CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

Para iniciar nuestro estudio de la cinemática, elegimos un caso simple: una partícula que se mueve en línea recta. Elegimos el movimiento en línea recta porque nos permite introducir algunos de los conceptos básicos de la cinemática, tales como velocidad y aceleración, sin la complejidad matemática de los vectores, los cuales se usan con frecuencia para analizar el movimiento bidimensional y tridimensional. Sin embargo, dentro de esta limitación, podemos considerar una amplia gama de situaciones físicas: la caída de una piedra, la aceleración de un tren, el frenado de un automóvil, el deslizamiento de un disco de goma en el hockey sobre hielo, el traslado de una caja en una rampa, el movimiento rápido de un electrón dentro de un tubo de rayos X, etc. El estado del movimiento puede cambiar (el disco de goma usado en el hockey sobre hielo debe ser golpeado antes de que se deslice) y su dirección puede cambiar (la piedra puede ser arrojada hacia arriba antes de que caiga), pero el movimiento debe ser confinado a una simple línea.

También simplificaremos esta exposición considerando el movimiento de una *partícula* únicamente. Esto es, trataremos a un objeto complejo como si fuera un simple punto de masa. Esto nos permite despreciar todos los movimientos internos posibles, por ejemplo, el movimiento de rotación

del objeto (el cual consideraremos en los capítulos 11 a 13) o la vibración de sus partes (capítulo 15). Para el caso que nos ocupa, todas las partes del objeto se mueven exactamente de la misma manera. El giro de una rueda no satisface esta restricción, porque un punto de la llanta se mueve de un modo diferente a un punto del eje. (El *deslizamiento* de la rueda, en cambio, sí la satisface. Entonces la rueda, lo mismo que otros objetos materiales, podría ser considerada como una partícula en ciertos cálculos pero no en otros.) En tanto que nos conciernen solamente las variables cinemáticas, no existe razón para no considerar sobre la misma base la marcha de un tren que la de un electrón como ejemplos del movimiento de una *partícula*.

Dentro de estas limitaciones, consideraremos todas las clases de movimiento posibles. Las partículas pueden acelerar, decelerar, e incluso detener e invertir su movimiento. Buscaremos una descripción del movimiento que incluya cualquiera de estas posibilidades.

2-2 DESCRIPCIONES DEL MOVIMIENTO

Describiremos el movimiento de una partícula de dos maneras: con ecuaciones matemáticas y con gráficas. Cualquier manera es apropiada para el estudio de la cine-

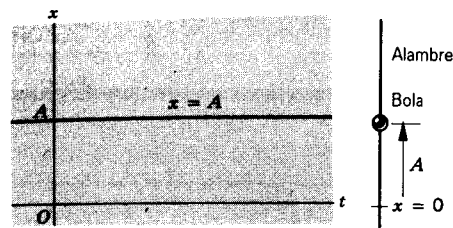


Figura 1 Una bola perforada se desliza libremente a lo largo de un alambre en una dimensión; la dirección del movimiento es arbitraria y no necesariamente vertical. En este caso la bola está en reposo en el punto A de la coordenada x , y su “movimiento” se halla descrito por la línea recta horizontal $x = A$.

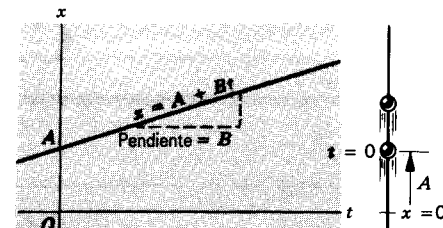


Figura 2 Una bola que se desliza a lo largo de un alambre en una dimensión se mueve a velocidad constante B en la dirección positiva x ; comienza en el tiempo 0 en el punto A sobre la coordenada x . Su movimiento está descrito por la línea $x = A + Bt$.

mática, y comenzaremos usando ambos métodos. El enfoque matemático es usualmente mejor para resolver problemas, porque permite más precisión que el método gráfico. El método gráfico es útil porque a menudo provee más introspección física que un grupo de ecuaciones matemáticas.

Puede obtenerse una descripción completa del movimiento de una partícula si conocemos la dependencia matemática de su posición x (relativa a un origen elegido de un marco de referencia en particular) en el tiempo t en todo momento. Ésta es precisamente la función $x(t)$. Aquí presentamos algunas clases de movimiento posibles junto con las funciones y las gráficas que las describen:

1. *Ningún movimiento en absoluto.* Aquí la partícula ocupa la posición A en la coordenada en todo momento:

$$x(t) = A. \quad (1)$$

En la figura 1 se presenta una gráfica de este “movimiento”. Para el objeto de estas ilustraciones, imaginemos la partícula descrita por la gráfica como una bolita perforada que se desliza sin fricción por un alambre largo. En este caso la bolita está en reposo en la ubicación $x = A$. Nótese que hemos trazado la gráfica con x como la variable dependiente (sobre el eje vertical) y t como la variable independiente (sobre el eje horizontal).

2. *Movimiento a velocidad constante.* La razón de movimiento de una partícula se describe por su *velocidad*. En el movimiento unidimensional, la velocidad puede ser o bien positiva, si la partícula se mueve en la dirección en que x crece, o bien negativa, si se mueve en la dirección opuesta. Otra medida de la razón de movimiento de una partícula es la magnitud de la velocidad de la partícula. La magnitud de la velocidad es siempre positiva y no conlleva una información direccional.

En el caso del movimiento a velocidad constante, la posición de trazado en la gráfica contra el tiempo es una línea

recta con una pendiente constante. En cálculo aprendimos que la *pendiente* de cualquier función nos habla de su *cantidad de cambio*. Aquí la cantidad de cambio de la posición es la velocidad, y cuanto más acentuada sea la pendiente de la gráfica, mayor será la velocidad. Matemáticamente, tenemos que

$$x(t) = A + Bt, \quad (2)$$

que es la forma acostumbrada de la expresión de una línea recta (más comúnmente expresada como $y = mx + b$) de pendiente B .

La ilustración gráfica de la figura 2 muestra a la partícula en la posición $x = A$ en el tiempo $t = 0$. Se está moviendo con rapidez constante en la dirección creciente de x . Su velocidad es, entonces, positiva, como lo indica la pendiente positiva.

3. *Movimiento acelerado.* En este caso la velocidad está cambiando (la aceleración se define como la razón de cambio de la velocidad), y por lo tanto la pendiente cambiará también. Estas gráficas son, entonces, líneas curvas más bien que rectas. Dos ejemplos son:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2, \quad (3)$$

$$x(t) = A \cos \omega t. \quad (4)$$

En el primer caso, suponiendo que $C > 0$, la pendiente aumenta en forma continua al moverse la partícula más y más rápidamente (Fig. 3a). En el segundo caso, la partícula oscila entre $x = +A$ y $x = -A$ (Fig. 3b), y su velocidad cambia de la posición positiva a la negativa al cambiar de signo la pendiente.

A menudo, las descripciones completas del movimiento son más complejas que las ilustraciones sencillas que hemos llevado a cabo. Aquí se citan algunos ejemplos:

4. *Aceleración y frenado en un automóvil.* Un automóvil parte del reposo y acelera hasta determinada veloci-

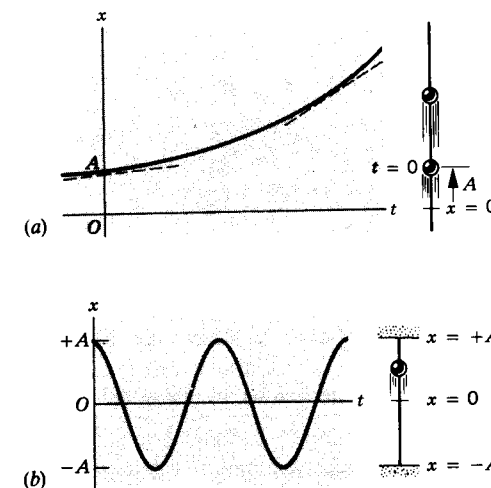


Figura 3 (a) Una bola deslizándose a lo largo de un alambre unidimensionalmente se mueve en la dirección positiva x a una velocidad constantemente creciente. La velocidad es igual a la pendiente de la curva que describe el movimiento de la partícula; se puede ver cómo la pendiente de la curva crece en forma continua. (b) Una bola deslizándose a lo largo de un alambre unidimensionalmente oscila entre $x = +A$ y $x = -A$.

dad. Luego se mueve durante un tiempo a velocidad constante, después del cual se aplican los frenos, trayendo al automóvil de nuevo al reposo. La figura 4 muestra el movimiento. Ninguna ecuación matemática única describe el movimiento; podríamos usar expresiones de la forma de la ecuación 1 para las partes del movimiento en reposo, y una expresión de la forma de la ecuación 3 para la parte de la aceleración; una de la forma de la ecuación 2 para la parte con velocidad constante y, finalmente, otra, también de la forma de la ecuación 3, para la parte de frenado.

Nótese que la gráfica tiene dos características: $(x)t$ es continua (la gráfica no se rompe) y la pendiente es continua (no hay puntos agudos). Esperamos que $x(t)$ sea siempre continua, de otro modo el automóvil desaparecería en un punto y reaparecería en otro. Los picos de la gráfica, como veremos más tarde, significan que la velocidad cambia *instantáneamente* de un valor a otro. Esto, por supuesto, no es una situación completamente física, pero a menudo es una buena aproximación a tal situación.

5. *Rebote de un disco de goma.* Un disco de goma de los que se usan en el hockey se desliza en el hielo a velocidad constante, choca con la pared, y luego rebota en la dirección opuesta con la misma velocidad. La figura 5 muestra el movimiento donde se supone que el choque invierte instantáneamente al movimiento. En realidad, si exami-

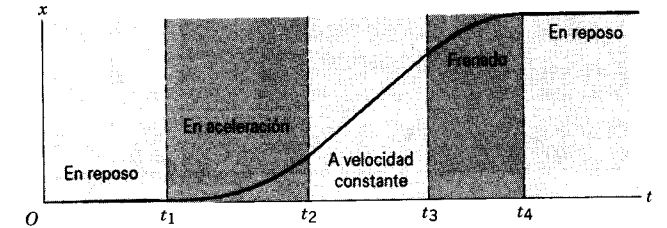


Figura 4 La curva describe a un automóvil que está en reposo desde $t = 0$ hasta $t = t_1$, en cuyo tiempo comienza a acelerar. En $t = t_2$ para de acelerar y comienza a moverse a velocidad constante. Los frenos actúan en el tiempo $t = t_3$, y la velocidad decrece gradualmente hasta que llega a 0 en el tiempo $t = t_4$.

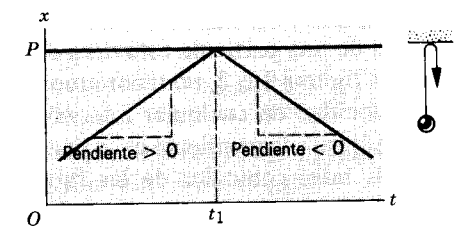


Figura 5 Un disco de goma de hockey se mueve sobre el hielo a velocidad constante cuando choca con una pared rígida en $x = P$ en el tiempo t_1 , después de lo cual se aleja de la pared a una velocidad igual en magnitud pero opuesta en dirección. El movimiento del disco de goma se da unidimensionalmente. Para un objeto en rebote real, el punto agudo en $x(t)$ estaría ligeramente redondeado.

namos con cuidado el “punto”, hallaremos que no es agudo sino ligeramente redondeado, a consecuencia de la elasticidad de la pared y del disco de goma.

6. *Una bola pegajosa de arcilla.* Un estudiante arroja hacia arriba una bola de arcilla; el punto de liberación está sobre la cabeza del estudiante. La bola se eleva a cierta altura, luego cae y se pega al piso. La figura 6 describe el movimiento. La pendiente en $t = 0$ representa la velocidad inicial con la cual fue arrojada la arcilla hacia arriba. La velocidad pasa a través de cero en la parte superior de la trayectoria (donde la pendiente es cero), y luego la arcilla se mueve hacia abajo a velocidad creciente. Cuando toca el suelo, súbitamente llega al reposo y su velocidad es cero.

Recuérdese que las gráficas mostradas en esta sección son representaciones del movimiento, no trazos de las trayectorias reales seguidas por las partículas. En la figura 6, por ejemplo, la partícula se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la misma línea; no sigue la trayectoria curva que se muestra en la figura.

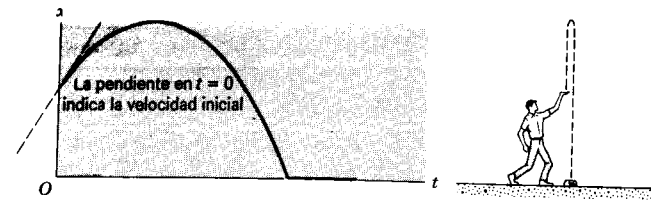


Figura 6. Una bola de arcilla es arrojada hacia arriba, se eleva a cierta altura, y luego cae al suelo. Al chocar con el suelo queda en reposo. La curva describe su movimiento. En realidad, el punto abrupto en $x(t)$ estaría ligeramente redondeado.

2-3 VELOCIDAD PROMEDIO

Si el movimiento de una partícula estuviera descrito por gráficas como las figuras 1 ó 2, no tendríamos problema en obtener la velocidad en cualquier intervalo de tiempo: es constante e igual a la pendiente de la línea. En casos más complicados, tales como los de las figuras 3 a 6, donde la velocidad cambia, es conveniente definir la *velocidad media* o *velocidad promedio* $\bar{v}$. (Una barra sobre el símbolo en *cualquier* cantidad física indica un valor promedio de esa cantidad.)

Supongamos, como se indica en la figura 7, que la partícula está en un punto x_1 en el tiempo t_1 y luego se mueve hasta el punto x_2 en el tiempo t_2 . La velocidad promedio en el intervalo se define así:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (5)$$

donde

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (6)$$

y

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (7)$$

Aquí Δx es el *desplazamiento* (esto es, el cambio de posición) que ocurre durante el *intervalo de tiempo* Δt . En la figura 7 puede verse que $\bar{v}$ es simplemente la pendiente de la línea recta que conecta a los puntos extremos del intervalo.

La velocidad promedio nos proporciona el comportamiento promedio durante el intervalo de tiempo Δt . *El comportamiento real entre x_1 y x_2 no interesa para el cálculo de la velocidad promedio.* Cualquier detalle del movimiento particular entre x_1 y x_2 se pierde cuando tomamos el promedio.

Si suponemos que nuestros relojes están siempre marchando hacia adelante ($t_2 > t_1$), entonces el signo de $\bar{v}$ está determinado por el signo de $\Delta x = x_2 - x_1$. Si $\bar{v}$ es positiva, entonces, en promedio, la partícula se mueve de modo que x aumenta con el tiempo. (Puede moverse hacia atrás un

tanto en el intervalo, pero acaba con una coordenada x más grande que cuando comenzó.) Si $\bar{v}$ es negativa, entonces, en promedio, la partícula se mueve hacia atrás. En particular, nótese que de acuerdo con esta definición de v , la velocidad promedio es cero en cualquier viaje en el que se retorne al punto de partida, no importa qué tan rápido se haya podido mover en cualquier segmento en particular, porque el desplazamiento será cero. En el conteo del tiempo desde la línea de arranque hasta la meta, la velocidad promedio de un corredor de Indianápolis 500 ¡es cero!

Problema muestra 1 Usted maneja su BMW por una carretera recta durante 5.2 mi a 43 mi/h, en cuyo punto se queda sin gasolina. Camina 1.2 millas hacia adelante, hasta la estación de gasolina más próxima, durante 27 min. ¿Cuál fue la velocidad promedio desde el momento en que arrancó con su automóvil hasta el momento en que llegó a la estación de gasolina?

Solución. Se puede hallar la velocidad promedio por la ecuación 5 si se conocen tanto Δx , la distancia neta que fue cubierta (el desplazamiento), como Δt , el tiempo transcurrido correspondiente. Estas cantidades son:

$$\Delta x = 5.2 \text{ mi} + 1.2 \text{ mi} = 6.4 \text{ mi}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{5.2 \text{ mi}}{43 \text{ mi/h}} + 27 \text{ min} \\ &= 7.3 \text{ min} + 27 \text{ min} = 34 \text{ min} = 0.57 \text{ h.} \end{aligned}$$

Entonces, según la ecuación 5 tendremos que

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6.4 \text{ mi}}{0.57 \text{ h}} = 11.2 \text{ mi/h.}$$

La gráfica de $x(t)$ de la figura 8 ayuda a visualizar el problema. Los puntos O y P definen el intervalo en el que queremos hallar la velocidad promedio, siendo esta cantidad la pendiente de la línea recta que une a estos puntos.

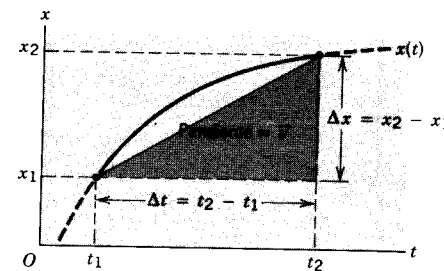


Figura 7 La velocidad promedio en el intervalo Δt entre t_1 y t_2 se determina por el desplazamiento Δx durante el intervalo; la forma real de la curva $x(t)$ en el intervalo no es de consecuencia en la determinación de la velocidad promedio.

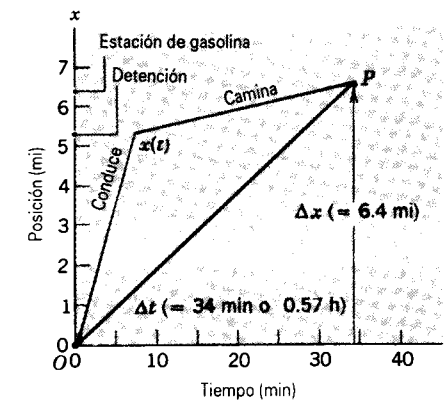


Figura 8 Problema muestra 1. Las líneas de "conduce" y "camina" muestran movimientos a velocidades constantes diferentes en las dos porciones del viaje. La velocidad promedio es la pendiente de la línea OP .

2-4 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

La velocidad promedio puede ser útil al considerar el comportamiento total de una partícula durante cierto intervalo, pero para describir los *detalles* de su movimiento la velocidad promedio no es particularmente útil. Sería más apropiado obtener una función matemática $v(t)$, la cual da la velocidad en cualquier punto durante el movimiento. Ésta es la *velocidad instantánea*; de ahora en adelante, cuando usemos el término "velocidad" entenderemos que significa velocidad instantánea.

Supongamos que tratamos de calcular la velocidad promedio, como se muestra en la figura 9, cuando el intervalo Δt se vuelve cada vez más pequeño. En este caso límite, en que $\Delta t \rightarrow 0$, la línea que une a los puntos extremos del intervalo se aproxima a la tangente de la curva $x(t)$ en un punto, y la velocidad promedio se aproxima a la pendiente de $x(t)$, la cual define la velocidad instantánea en ese punto:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (8)$$

TABLA 1 EL PROCESO LÍMITE

Punto inicial		Punto final		Intervalos		Velocidad promedio
x_1 (m)	t_1 (s)	x_2 (m)	t_2 (s)	Δx (m)	Δt (s)	(m/s)
6.000	1.000	13.000	2.000	7.000	1.000	7.00
6.000	1.000	9.000	1.500	3.000	0.500	6.00
6.000	1.000	8.320	1.400	2.320	0.400	5.80
6.000	1.000	7.375	1.250	1.375	0.250	5.50
6.000	1.000	7.080	1.200	1.080	0.200	5.40
6.000	1.000	6.520	1.100	0.520	0.100	5.20
6.000	1.000	6.255	1.050	0.255	0.050	5.1
6.000	1.000	6.152	1.030	0.152	0.030	5.1
6.000	1.000	6.050	1.010	0.050	0.010	5.0

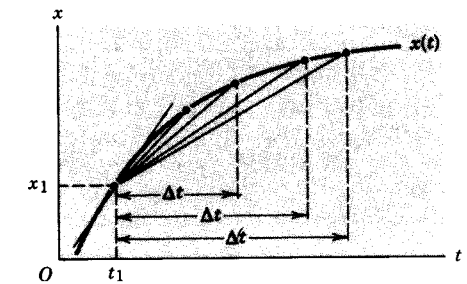


Figura 9 El intervalo Δt crece menos en este caso ya que mantenemos a t_1 fijo y nos movemos al otro punto extremo t_2 más cercano a t_1 . En el límite, el intervalo tiende a cero y la cuerda se vuelve una tangente.

El lado derecho de la ecuación 8 está en la forma de la *derivada* de $x(t)$ con respecto a t , o sea dx/dt . Entonces

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (9)$$

La velocidad (instantánea) es precisamente la cantidad del cambio de posición con el tiempo.

La tabla 1 ofrece un ejemplo de cómo converge el proceso límite hacia el valor instantáneo. Los datos de la tabla 1 se calcularon usando $x(t) = 3.000 + 1.000t + 2.000t^2$, estando t en segundos y x en metros. Hemos elegido mantener al punto (t_1, x_1) fijo y mover el punto (t_2, x_2) gradualmente hacia (t_1, x_1) para simular el proceso límite. El límite parece tender al valor $v = 5.0 \text{ m/s}$ en $t_1 = 1.0 \text{ s}$; diferenciando la expresión de arriba para $x(t)$, hallaremos la expresión de la velocidad instantánea:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3.000 + 1.000t + 2.000t^2) \\ &= 0 + 1.000 + 2(2.000t) = 1.000 + 4.000t, \end{aligned}$$

la cual verdaderamente da el valor de 5.000 m/s para $t = 1.000 \text{ s}$. Claramente, el valor promedio converge hacia el valor instantáneo según se vuelve más pequeño el intervalo.

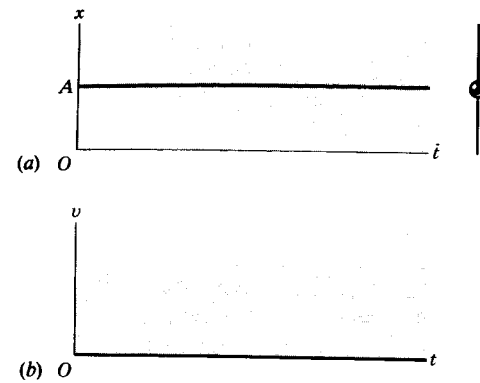


Figura 10 (a) La posición y (b) la velocidad de una bola perforada en reposo en un alambre en $x = A$.

Así pues, dada cualquier $x(t)$, podemos hallar $v(t)$ diferenciando. Gráficamente, podemos evaluar (punto por punto) la pendiente de $x(t)$ para trazar $v(t)$. Revisemos ahora los ejemplos de la sección 2-2, de los cuales los primeros tres tratan de una bola perforada que se desliza a lo largo de un alambre recto largo:

1. **Ningún movimiento en absoluto.** De la ecuación 1, $x(t) = A$ y entonces

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0, \quad (10)$$

porque la derivada de cualquier constante es cero. La figura 10 muestra a $x(t)$ junto con $v(t)$.

2. **Movimiento a velocidad constante.** Con $x(t) = A + Bt$ de la ecuación 2, hallamos que

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt) = 0 + B. \quad (11)$$

La velocidad instantánea (constante) es B , como se muestra en la figura 11.

3. **Movimiento acelerado.** Usando la ecuación 3, $x(t) = A + Bt + Ct^2$, tenemos que

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^2) = 0 + B + 2Ct. \quad (12)$$

La velocidad cambia con el tiempo; si $C > 0$, la velocidad *aumenta* con el tiempo. La figura 12 muestra a $x(t)$ y a $v(t)$.

4. **Un automóvil que acelera y frena.** Sin escribir $x(t)$, podemos trazar la gráfica de $v(t)$ estudiando la figura 4. En el primer intervalo, el automóvil está en reposo y $v = 0$. En el siguiente intervalo, el automóvil está acelerando y $v(t)$ tiene la forma de la ecuación 12. En el intervalo a velocidad constante, $v = \text{constante}$ (igual a su valor al final del intervalo de aceleración), y por lo tanto $C = 0$ en este

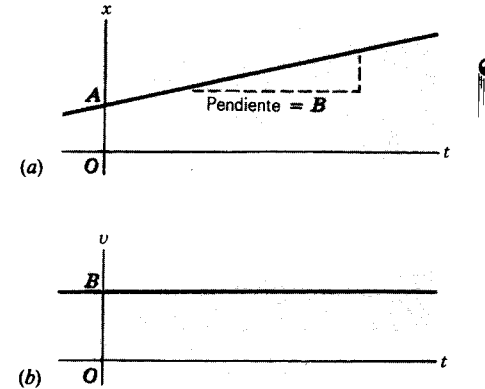


Figura 11 (a) La posición y (b) la velocidad de una bola perforada que se desliza unidimensionalmente a lo largo de un alambre con velocidad constante. La velocidad es igual a la pendiente B de la gráfica de $x(t)$. La gráfica de $v(t)$ es la línea horizontal $v = B$.

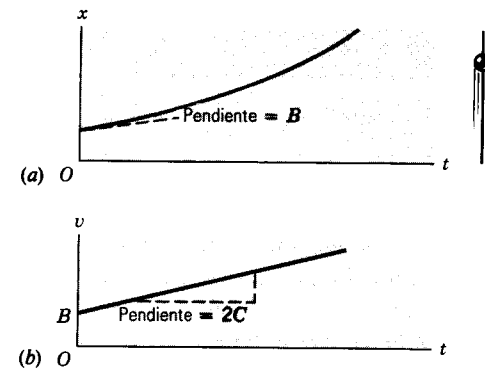


Figura 12 (a) La posición y (b) la velocidad de una bola perforada acelerada que se desliza unidimensionalmente a lo largo de un alambre. La velocidad aumenta con el tiempo, como se indica por la pendiente creciente de $x(t)$ y también por el aumento lineal de $v(t)$.

intervalo. Finalmente, en la fase de frenado, $v(t)$ nuevamente tiene la forma de la ecuación 12 pero ahora con $C < 0$ (pendiente negativa). La figura 13 muestra un trazado del movimiento.

En la realidad, no podemos saltar súbitamente de un estado de reposo a un estado de movimiento acelerado, o de un estado de aceleración a otro de velocidad constante. En términos de la gráfica de la figura 13, las esquinas agudas en el trazo de $v(t)$ estarían redondeadas para un automóvil real, y la ecuación de movimiento sería más complicada que la ecuación 12. Para simplificar continuamos suponiendo el comportamiento idealizado que se muestra en la figura 13.

5. **El rebote de un disco de goma.** Aquí tenemos una velocidad constante antes del rebote y una velocidad igual pero opuesta (negativa) después del rebote. La figura 14

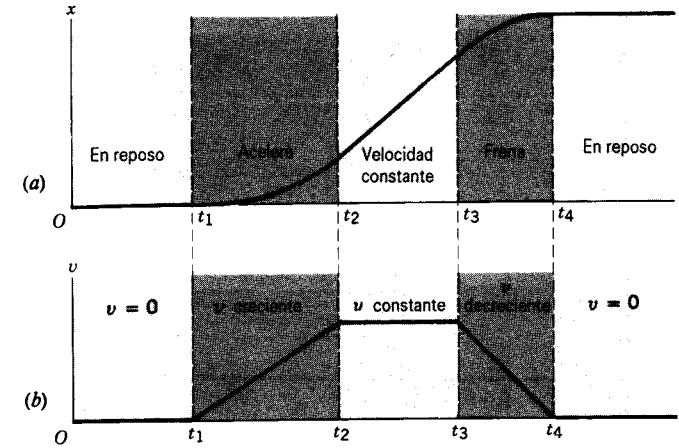


Figura 13 (a) La posición y (b) la velocidad de un automóvil que arranca del reposo, luego aumenta su velocidad durante un tiempo, después se mueve por un tiempo a velocidad constante, y finalmente disminuye su velocidad hasta llegar nuevamente al reposo. La gráfica inferior muestra a $v(t)$ correspondiendo exactamente con la gráfica $x(t)$ de arriba y en la figura 4. Para un automóvil real, los cambios en la velocidad deben ser suaves en lugar de súbitos, de modo que las puntas agudas de la gráfica $v(t)$ estarían redondeadas.

muestra a $v(t)$. Nótese que la “punta” en la gráfica $x(t)$ produce una discontinuidad en la gráfica $v(t)$, nada de lo cual ocurriría para objetos reales.

6. **Una bola pegajosa de arcilla.** Aquí, como se muestra en la figura 15, la arcilla arranca de una posición inicial v (arbitrariamente elegimos que la dirección hacia arriba sea positiva), pero su velocidad disminuye. Su movimiento se describiría con una ecuación similar a la ecuación 12, pero con $C < 0$. En la cima de su movimiento $v = 0$, de modo que la línea $v(t)$ debe cruzar al eje en ese punto. Cuando la bola choca con el suelo, v llega instantáneamente a cero. (Una vez más, una “punta” de la gráfica $x(t)$ produce una discontinuidad en $v(t)$; en la realidad la punta estaría redondeada y no habría discontinuidad.)

2-5 MOVIMIENTO ACELERADO

Como ya hemos visto (figuras 12, 13 y 15), la velocidad de una partícula puede cambiar con el tiempo según procede el movimiento. Este cambio de velocidad con el tiempo se llama *aceleración*. En analogía con la ecuación 5, podemos calcular una aceleración promedio por el cambio en la velocidad $\Delta v = v_2 - v_1$ en el intervalo Δt :

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (13)$$

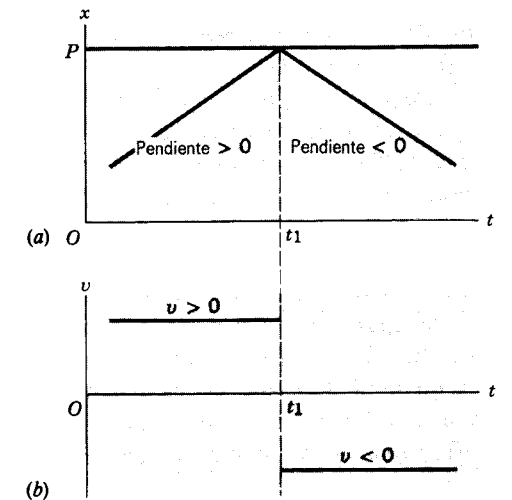


Figura 14 (a) La posición y (b) la velocidad de un disco de goma de hockey rebotando en una superficie dura. En $t = t_1$, la velocidad cambia “instantáneamente” de signo en esta gráfica idealizada, aunque en la realidad la velocidad cambiaría durante cierto intervalo pequeño (pero distinto de cero) y la punta aguda en la gráfica $x(t)$ estaría correspondientemente redondeada.

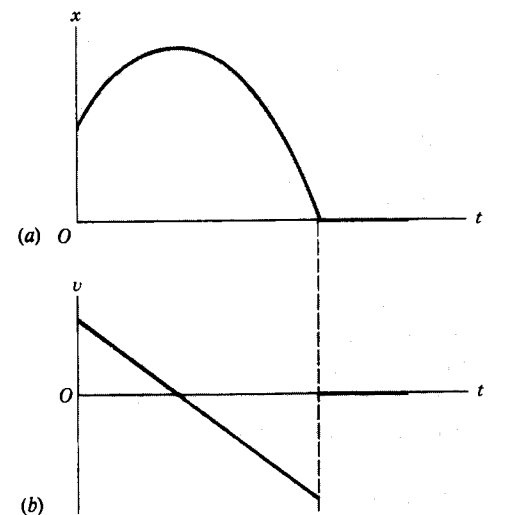


Figura 15 (a) La posición y (b) la velocidad de la bola de arcilla lanzada, como en la figura 6. En realidad, la velocidad no puede cambiar instantáneamente de un valor distinto de cero al valor cero, y la elevación vertical en $v(t)$ cuando la bola golpea al suelo sería más gradual.

La aceleración tiene unidades de velocidad divididas entre el tiempo, por ejemplo, metros por segundo por segundo, escrito en m/s^2 .

Como fue el caso con la velocidad promedio $\bar{v}$, la aceleración promedio $\bar{a}$ no nos dice nada acerca de la variación de $\bar{v}(t)$ con t durante el intervalo Δt . Depende sólo del cambio neto de la velocidad durante el intervalo. Si $\bar{a}$ es evaluada como una constante (posiblemente cero) en

tales intervalos, entonces podemos concluir que tenemos una aceleración constante. En este caso, el cambio en la velocidad es el mismo en todos los intervalos de la misma duración. Por ejemplo, la aceleración producida por la gravedad de la Tierra es (como se discutirá más adelante en este capítulo) casi constante cerca de la superficie de la Tierra y tiene el valor 9.8 m/s^2 . La velocidad de un objeto en su caída cambia en 9.8 m/s cada segundo, aumentando 9.8 m/s en el primer segundo, luego otros 9.8 m/s en el siguiente segundo, y así sucesivamente.

Si el cambio de la velocidad en intervalos de tiempo sucesivos de igual longitud no es la misma, entonces tenemos un caso de aceleración variable. En tales casos es útil definir la aceleración instantánea:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

o sea

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (14)$$

en analogía con la ecuación 9 para la velocidad instantánea.

Nótese que la aceleración puede ser positiva o negativa independientemente de si v es positiva o negativa: por ejemplo, podemos tener una a positiva con una v negativa. La aceleración a da el *cambio* de velocidad; el cambio puede ser un aumento o una disminución para una velocidad ya sea positiva o negativa. Por ejemplo, un elevador que se mueve hacia arriba (lo cual hemos tomado como la dirección de la velocidad positiva) puede acelerar hacia arriba ($a > 0$) y moverse más aprisa o acelerar hacia abajo ($a < 0$) y moverse más despacio (pero todavía en la dirección hacia arriba). Cuando se mueve hacia abajo ($v < 0$), puede acelerar hacia abajo ($a < 0$) y moverse más aprisa, o acelerar hacia arriba ($a > 0$) y moverse más despacio. Cuando la aceleración y la velocidad tienen signos opuestos, de modo que la rapidez (la magnitud de la velocidad) esté decreciendo, nos referimos a ello como una *deceleración*.

La aceleración definida por la ecuación 14 es justamente la pendiente de la gráfica $v(t)$. Si $v(t)$ es constante, entonces $a = 0$; si $v(t)$ es una línea recta, entonces a es una constante igual a la pendiente de la línea. Si $v(t)$ es una curva, entonces a será alguna función de t , obtenida hallando la derivada de $v(t)$.

Podemos ahora incluir la aceleración en las gráficas de las figuras 10 a 15. Como ejemplo, mostraremos el caso de la aceleración y el frenado de un automóvil (Fig. 16). Los restantes ejemplos se dejan al estudiante como ejercicios.

Problema muestra 2 La figura 17a muestra seis “instantáneas” sucesivas de una partícula que se mueve a lo largo del

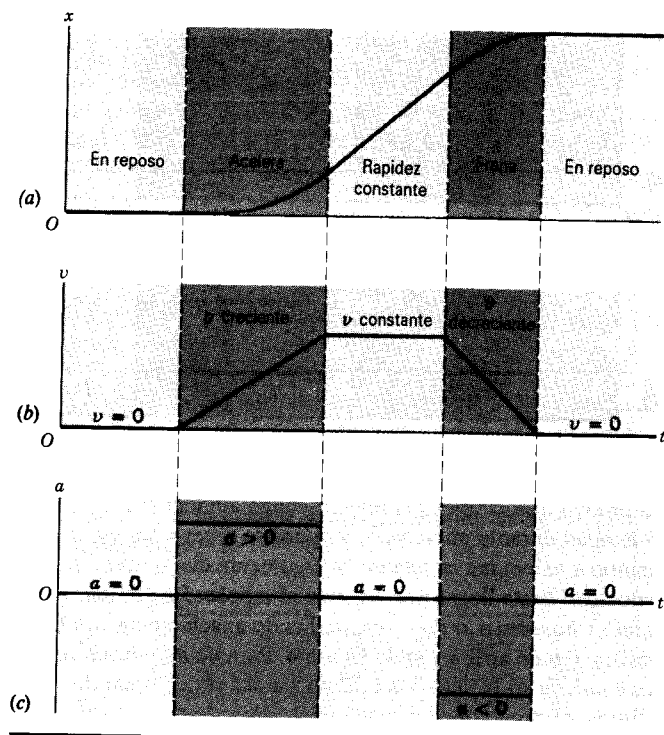


Figura 16 (a) La posición, (b) la velocidad, y (c) la aceleración de un automóvil que arranca del reposo, acelera durante un intervalo, luego se mueve a velocidad constante, y luego frena con una aceleración negativa para llegar de nuevo al reposo. En realidad, no podemos cambiar instantáneamente la aceleración de un automóvil de un valor a otro; tanto $a(t)$ como $v(t)$ serían, en un automóvil real, suaves y continuas. Los segmentos planos $a(t)$ estarían conectados por curvas suaves, y las puntas agudas de $v(t)$ estarían redondeadas.

eje x . En $t = 0$ está en la posición $x = +1.00 \text{ m}$ a la derecha del origen; en $t = 2.5 \text{ s}$ ha llegado al reposo para $x = +5.00 \text{ m}$; en $t = 4.0 \text{ s}$ ha regresado a $x = 1.4 \text{ m}$. La figura 17b es un trazado de la posición x contra el tiempo t de este movimiento, y las figuras 17c y 17d muestran la velocidad y la aceleración correspondientes de la partícula. (a) Halle la velocidad promedio para los intervalos AD y DF . (b) Calcule la pendiente de $x(t)$ en los puntos B y F y compare con los puntos correspondientes de la curva $v(t)$. (c) Halle la aceleración promedio en los intervalos AD y AF . (d) Calcule la pendiente de $v(t)$ en el punto D y compare con el valor de $a(t)$ correspondiente.

Solución. (a) Según la ecuación 5,

$$\bar{v}_{AD} = \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} = \frac{5.0 \text{ m} - 1.0 \text{ m}}{2.5 \text{ s} - 0.0 \text{ s}} = \frac{4.0 \text{ m}}{2.5 \text{ s}} = +1.6 \text{ m/s},$$

$$\bar{v}_{DF} = \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D} = \frac{1.4 \text{ m} - 5.0 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 2.5 \text{ s}} = \frac{-3.6 \text{ m}}{1.5 \text{ s}} = -2.4 \text{ m/s}.$$

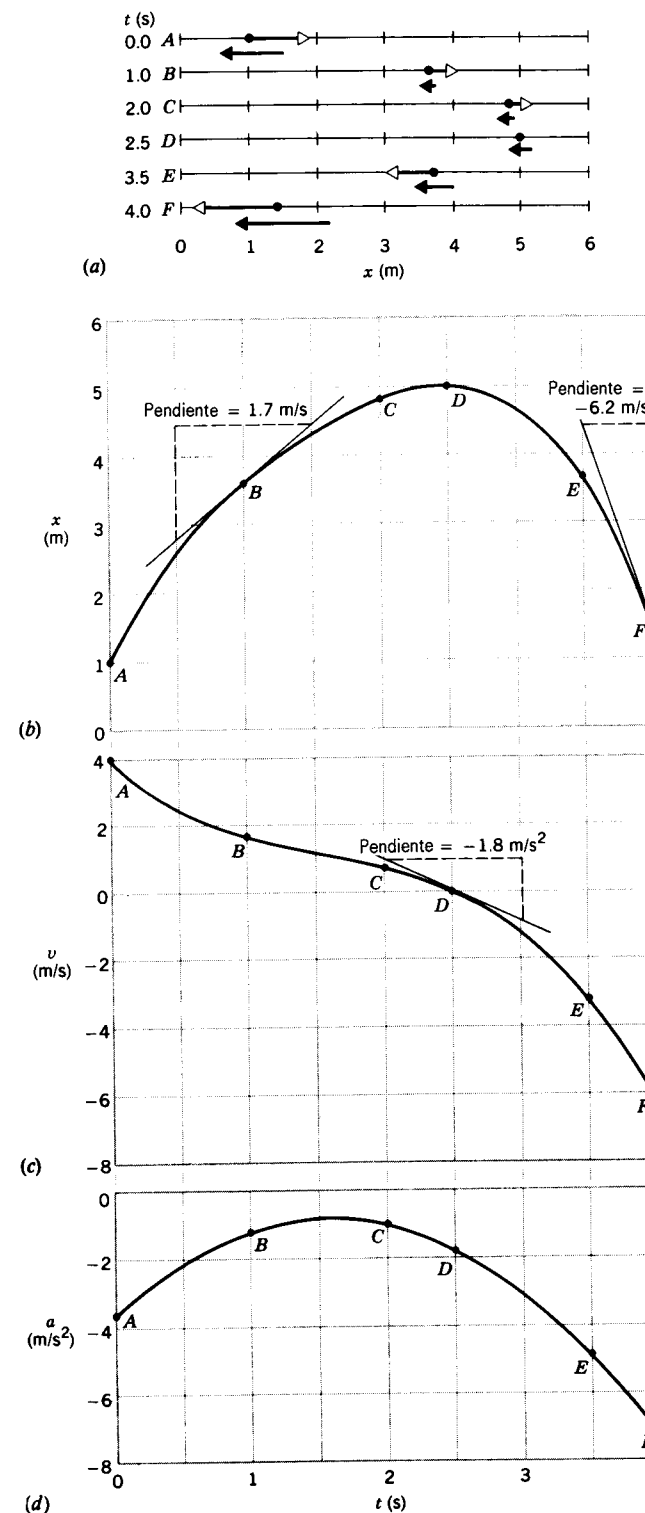


Figura 17 Problema muestra 2. (a) Seis “instantáneas” consecutivas de una partícula que se mueve a lo largo del eje x . La flecha que atraviesa la partícula muestra su velocidad instantánea, y la flecha *abajo* de la partícula muestra su aceleración instantánea. (b) Una gráfica de $x(t)$ para el movimiento de la partícula. Los seis puntos de A a F corresponden a las seis instantáneas. (c) Un trazado de $v(t)$. (d) Una pendiente de $a(t)$.

El signo positivo de $\bar{v}_{AD}$ nos dice que, en el promedio, la partícula se mueve en la dirección creciente de x (esto es, a la derecha en la figura 17a) durante el intervalo AD . El signo negativo de $\bar{v}_{DF}$ nos dice que la partícula, en el promedio, se está moviendo en la dirección decreciente de x (a la izquierda de la figura 17a) durante el intervalo DF .

(b) Por las tangentes a $x(t)$ trazadas en los puntos B y F en la figura 17b calculamos lo siguiente:

$$\text{punto } B; \text{ pendiente} = \frac{4.5 \text{ m} - 2.8 \text{ m}}{1.5 \text{ s} - 0.5 \text{ s}} = \frac{1.7 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = +1.7 \text{ m/s},$$

$$\text{punto } F; \text{ pendiente} = \frac{1.4 \text{ m} - 4.5 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 3.5 \text{ s}} = \frac{-3.1 \text{ m}}{0.5 \text{ s}} = -6.2 \text{ m/s}.$$

De $v(t)$ en los puntos B y F de la figura 17c calculamos que $v_B = +1.7 \text{ m/s}$ y $v_F = -6.2 \text{ m/s}$, de acuerdo con las pendientes de $x(t)$. Como se esperaba, $v(t) = dx/dt$.

(c) De la ecuación 13,

$$\bar{a}_{AD} = \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A} = \frac{0.0 \text{ m/s} - 4.0 \text{ m/s}}{2.5 \text{ s} - 0.0 \text{ s}} = \frac{-4.0 \text{ m/s}}{2.5 \text{ s}} = -1.6 \text{ m/s}^2,$$

$$\bar{a}_{AF} = \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A} = \frac{-6.2 \text{ m/s} - 4.0 \text{ m/s}}{4.0 \text{ s} - 0.0 \text{ s}} = \frac{-10.2 \text{ m/s}}{4.0 \text{ s}} = -2.6 \text{ m/s}^2.$$

(d) De la línea tangente trazada para $v(t)$ en D , calculamos lo siguiente:

$$\text{pendiente} = \frac{-0.9 \text{ m/s} - 0.9 \text{ m/s}}{3.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = \frac{-1.8 \text{ m/s}}{1.0 \text{ s}} = -1.8 \text{ m/s}^2.$$

En el punto D de la gráfica $a(t)$ vemos que $a_D = -1.8 \text{ m/s}^2$. Entonces $a = dv/dt$. Examinando la gráfica $v(t)$ de la figura 17c, vemos que su pendiente es negativa en todos los tiempos cubiertos por la gráfica, y entonces $a(t)$ sería negativa. La figura 17d lo confirma.

2-6 MOVIMIENTO CON ACCELERACIÓN CONSTANTE

Es bastante común encontrar movimiento con aceleración constante (o casi constante): los ejemplos ya citados de objetos que caen cerca de la superficie de la Tierra o el frenado de un automóvil son típicos. En esta sección deducimos un grupo de resultados útiles para este caso especial. Sin embargo, conviene tener en cuenta que ésta es una situación especial y que los resultados no son aplicables a los casos en los que a no sea constante. Ejemplos de casos con aceleración no constante incluyen la lenteja de un péndulo en movimiento, un cohete lanzado hacia la órbita de la Tierra, y una gota de lluvia que cae contra la resistencia del aire.

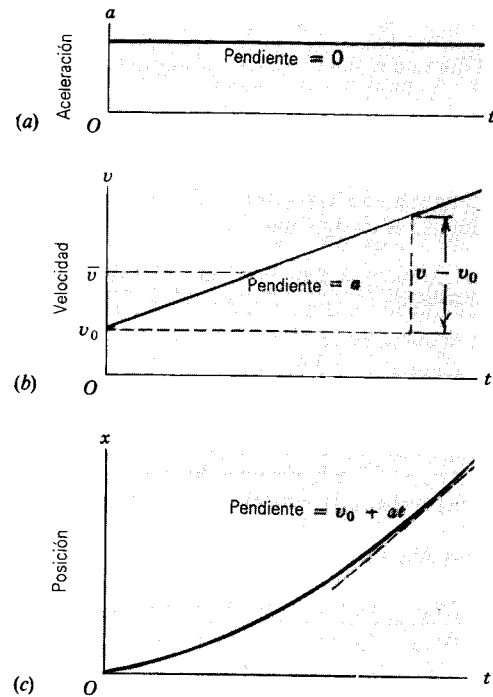


Figura 18 (a) La aceleración constante de una partícula, igual a la pendiente (constante) de $v(t)$. (b) Su velocidad $v(t)$, dada en cada punto por la pendiente de la curva $x(t)$. Se indica la velocidad promedio $\bar{v}$, que en el caso de la aceleración constante es igual al promedio de v y v_0 . (c) La posición $x(t)$ de una partícula que se mueve con aceleración constante. La curva está trazada para la posición inicial $x_0 = 0$.

Supongamos que a representa la aceleración constante, trazada en la figura 18a. (Si a es realmente constante, las aceleraciones promedio e instantánea son idénticas, y podemos usar las fórmulas derivadas previamente para cada caso.) Un objeto arranca con velocidad v_0 en el tiempo $t = 0$, y en un tiempo t posterior tiene una velocidad v . La ecuación 13 resulta, para este intervalo de tiempo,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0},$$

o sea

$$v = v_0 + at. \quad (15)$$

Este importante resultado nos permite hallar la velocidad de todos los tiempos posteriores. La ecuación 15 da la velocidad como una función del tiempo, lo que podría escribirse como $v(t)$, pero que usualmente escribimos simplemente como v . Nótese que la ecuación 15 está en la forma de $y = mx + b$, la cual describe la gráfica de una línea recta. Aquí a es la pendiente, como ya hemos explicado, y v_0 es la intersección (el valor de v en $t = 0$). Esta línea recta está trazada en la figura 18b.

Para completar el análisis de la cinemática de la aceleración constante, debemos hallar la dependencia de la posición x en el tiempo. Para esto necesitamos una expresión para la velocidad promedio en el intervalo. Si la gráfica de v contra t es una línea recta (véase la figura 18b), entonces el promedio o valor medio de v ocurre a medio camino a través del intervalo y es igual al promedio o media de los dos puntos extremos en el tiempo 0 y en el tiempo t :

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0). \quad (16)$$

Usando la ecuación 15 para eliminar v , obtenemos

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at. \quad (17)$$

Usando ahora la ecuación 5, que define la velocidad promedio, y suponiendo que la partícula se mueve de la posición x_0 en el tiempo 0 a la posición x en el tiempo t , la velocidad promedio puede escribirse

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0}. \quad (18)$$

Combinando las ecuaciones 17 y 18, obtenemos el resultado deseado para $x(t)$:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2. \quad (19)$$

Dados el valor de a y las condiciones iniciales x_0 y v_0 (esto es, la posición y la velocidad en $t = 0$), la ecuación 19 nos permite entonces hallar la posición x de todos los tiempos posteriores, lo cual es la meta de nuestro análisis cinemático. La distancia neta viajada desde el punto de partida, $x - x_0$, suele llamarse *desplazamiento*. Por conveniencia, a menudo elegimos el origen de las coordenadas de manera que $x_0 = 0$. La figura 18c muestra el trazado de x contra t para este caso.

Nótese que hay cuatro variables (x , v , a , t) y dos condiciones iniciales (x_0 , v_0). Las ecuaciones 15 a 19 están escritas en la forma acostumbrada para el análisis de cinemática como un problema de *valor inicial*: dada la situación física (esto es, la aceleración a) y las condiciones iniciales (x_0 y v_0), podemos hallar v y x para todos los t . Sin embargo, el problema puede plantearse, por lo general, en una forma diferente. Por ejemplo, dada la aceleración a , ¿a través de qué distancia (en lugar de "por cuánto tiempo") debe moverse la partícula para que su velocidad cambie de v_0 a v ? Aquí no entra el tiempo, y así podemos tratar las ecuaciones 15 y 19 como ecuaciones algebraicas y eliminar la variable indeseable t entre ellas:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (20)$$

Eliminando otras variables o parámetros, podemos obtener las ecuaciones 21 y 22, las cuales se muestran en la

TABLA 2 ECUACIONES PARA EL MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE†

Número de la ecuación	Ecuación	Contenido				
		x	v_0	v	a	t
15	$v = v_0 + at$	×	✓	✓	✓	✓
19	$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	✓	✓	×	✓	✓
20	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	✓	✓	✓	✓	×
21	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	✓	✓	✓	×	✓
22	$x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$	✓	×	✓	✓	✓

† Asegúrese de que la aceleración es constante antes de usar las ecuaciones de esta tabla.

tabla 2 con el grupo completo de ecuaciones cinemáticas para la aceleración constante.

Podemos verificar que la ecuación 19 es el resultado cinemático correcto por diferenciación, lo cual nos dará la velocidad v :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2) = v_0 + at = v.$$

La cual nos da, en efecto, el resultado esperado.

Al usar las ecuaciones de la tabla 2 para resolver un problema, puede elegirse el *origen del sistema de coordenadas* en cualquier ubicación conveniente. Las cuatro ecuaciones de la tabla 2 que dependen de x dependen también de x_0 y, de hecho, siempre dependen de la diferencia $x - x_0$. Usualmente el origen se elige para hacer a $x_0 = 0$, de modo que las ecuaciones resulten un tanto simplificadas. Puede también elegirse cualquier *dirección del eje de coordenadas* como positiva. Una vez que ha sido elegida una dirección en particular para designarla como positiva, entonces todos los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones en esa dirección serán positivas, y las de la dirección opuesta serán negativas. La elección del *origen* y la *dirección* del eje de coordenadas deben permanecer sin cambio durante la solución de cualquier problema en particular.

Problema muestra 3 Usted frena su Porsche desde la velocidad de 85 km/h (unas 53 mi/h, por supuesto, bastante más abajo del límite de velocidad) hasta 45 km/h en una distancia de 105 m. (a) ¿Cuál es la aceleración, suponiendo que sea constante en el intervalo? (b) ¿Qué tanto tiempo transcurrió durante el intervalo? (c) Si usted fuera a continuar frenando con la misma aceleración, ¿qué tanto tiempo le tomaría detenerse y qué distancia adicional tendría que cubrir?

Solución. (a) Seleccionemos primero que la dirección positiva será la dirección de la velocidad, y elijamos el origen de modo que $x_0 = 0$ cuando comienza a frenar. Hemos dado la velocidad inicial $v_0 = 85$ km/h en el tiempo $t = 0$, y sabemos que la velocidad final es $v = +45$ km/h en el tiempo t (que no conocemos) siendo el desplazamiento $+0.105$ km. Necesitamos una ecuación que incluya la aceleración desconocida que bus-

camos, pero en la que no intervenga el tiempo. La ecuación 20 es nuestra elección, y resolvemos para obtener a :

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45 \text{ km/h})^2 - (85 \text{ km/h})^2}{2(0.105 \text{ km})} = -2.48 \times 10^4 \text{ km/h}^2 = -1.91 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración resulta ser negativa, lo que significa que es opuesta a la dirección que habíamos elegido como positiva.

(b) Necesitamos una ecuación que no incluya a la aceleración, lo que nos permite hallar el tiempo a partir de los datos originales. En la tabla 2 vemos que la ecuación 21 cumple, y resolvemos para obtener t :

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_0 + v} = \frac{2(0.105 \text{ km})}{85 \text{ km/h} + 45 \text{ km/h}} = 1.62 \times 10^{-3} \text{ h} = 5.8 \text{ s}.$$

Hemos seleccionado para esta parte una ecuación que no incluya a la aceleración, porque de otro modo al resolver la parte (b) se introduciría un error que pudiera haberse cometido al resolver la parte (a). Cuando se resuelvan partes independientes de un problema, es una buena práctica retornar siempre a los datos originales, de ser ello posible.

(c) Ahora que ya conocemos la aceleración, buscaremos el tiempo t para que el automóvil pase de $v_0 = 85$ km/h a $v = 0$. La ecuación 15 es la elegida para hallar t :

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 85 \text{ km/h}}{-2.48 \times 10^4 \text{ km/h}^2} = 3.43 \times 10^{-3} \text{ h} = 12.3 \text{ s}.$$

El automóvil se detendrá en 12.3 s después de haber comenzado a frenar, o en 6.5 s (= 12.3 s - 5.8 s) después de haber alcanzado la velocidad de 45 km/h.

Para hallar la distancia, podemos usar la ecuación 20:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (85 \text{ km/h})^2}{2(-2.48 \times 10^4 \text{ km/h}^2)} = 0.146 \text{ km} = 146 \text{ m}.$$

La distancia adicional viajada entre el punto en el cual $v = 45$ km/h y el punto en el cual $v = 0$ es $146 \text{ m} - 105 \text{ m} = 41 \text{ m}$.

Problema muestra 4 Una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio) viaja a lo largo de un tubo hueco recto de 2.0 m de longitud que forma parte de un acelerador de partículas. (a) Si suponemos una aceleración uniforme, ¿cuál es la aceleración de la partícula, si entra a una velocidad de 1.0×10^4 m/s y sale a 5.0×10^6 m/s? (b) ¿Qué tanto tiempo estuvo en el tubo?

Solución. (a) Elegimos un eje x paralelo al tubo, siendo la dirección positiva aquella en la cual se está moviendo la partícula, y hallándose su origen en la entrada del tubo. Hemos dado v_0 , v , y x , y buscamos a . Reescribiendo la ecuación 20, con $x_0 = 0$,

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(5.0 \times 10^6 \text{ m/s})^2 - (1.0 \times 10^4 \text{ m/s})^2}{2(2.0 \text{ m})} = +6.3 \times 10^{12} \text{ m/s}^2.$$

(b) Aquí usamos la ecuación 21 resolviendo para t con $x_0 = 0$, lo cual nos da

$$t = \frac{2x}{v_0 + v} = \frac{2(2.0 \text{ m})}{1.0 \times 10^4 \text{ m/s} + 5.0 \times 10^6 \text{ m/s}} = 8.0 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.80 \mu\text{s}.$$

2-7 CUERPOS EN CAÍDA LIBRE

El ejemplo más común del movimiento con (casi) aceleración constante es la de un cuerpo que cae hacia la Tierra. Si permitimos que un cuerpo caiga en un vacío, de modo que la resistencia del aire no afecte su movimiento, encontraremos un hecho notable: *todos los cuerpos, independientemente de su tamaño, forma, o composición, caen con la misma aceleración en la misma región vecina a la superficie de la Tierra.* Esta aceleración, denotada por el símbolo g , se llama *aceleración en caída libre* (o, a veces, *aceleración debida a la gravedad*). Aunque la aceleración depende de la distancia desde el centro de la Tierra (como veremos en el capítulo 16), si la distancia de la caída es pequeña comparada con el radio de la Tierra (6400 km) podemos considerar a la aceleración como constante durante la caída.

Cerca de la superficie de la Tierra la magnitud de g es aproximadamente 9.8 m/s^2 , un valor que usaremos a través del texto a no ser que se especifique otra cosa. La dirección de la aceleración en caída libre en un punto determina lo que queremos significar con las palabras “hacia abajo” en ese punto.

Si bien hablamos de cuerpos *en caída*, los cuerpos con movimiento hacia arriba experimentan la misma aceleración en caída libre (en magnitud y en dirección). Esto es, sin importar que la velocidad de la partícula sea hacia arriba o hacia abajo, la dirección de su aceleración bajo la influencia de la gravedad de la Tierra es siempre hacia abajo.

El valor exacto de la aceleración en caída libre varía con la latitud y con la altitud. Hay también variaciones significativas causadas por diferencias en la densidad local de la corteza terrestre. Estudiaremos estas variaciones en el capítulo 16.

Las ecuaciones de la tabla 2, que fueron derivadas para el caso de una aceleración constante, pueden ser aplicadas

a la caída libre. Con este fin, hacemos primero dos pequeños cambios: (1) Marcamos la dirección de la caída libre como el eje y y tomamos como positiva la dirección hacia arriba. Más adelante, en el capítulo 4, consideraremos el movimiento en dos dimensiones, y desearíamos marcar el movimiento horizontal como x . (2) Reemplazamos en la tabla 2 a la aceleración constante a por $-g$, puesto que nuestra elección de la dirección positiva y como “hacia arriba” significa que la aceleración es negativa. A causa de que decidimos que la aceleración (hacia abajo) fuera $-g$, g es un número *positivo*.

Con estos pequeños cambios, las ecuaciones de la tabla 2 resultan ser

$$v = v_0 - gt, \quad (23)$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (24)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0), \quad (25)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t, \quad (26)$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2. \quad (27)$$

y

Problema muestra 5 Un cuerpo se deja caer libremente desde el reposo. Determine la posición y la velocidad del cuerpo después de que han transcurrido 1.0, 2.0, 3.0, y 4.0 s.

Solución Elegimos al punto de partida como el origen. Conocemos la rapidez inicial (cero) y la aceleración, y se nos da el tiempo. Para hallar la posición, usamos la ecuación 24 con $y_0 = 0$ y $v_0 = 0$:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Poniendo $t = 1.0$ s, obtenemos

$$y = -\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = -4.9 \text{ m}.$$

Para hallar la velocidad, usaremos la ecuación 23, una vez más con $v_0 = 0$:

$$v = -gt = -(9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s}) = -9.8 \text{ m/s}.$$

Después de caer durante 1.0 s, el cuerpo está a 4.9 m *abajo* (y es negativa) de su punto de arranque y se mueve *hacia abajo* (v es negativa) a una velocidad de 9.8 m/s. Continuando de esta manera, podemos hallar las posiciones y velocidades en $t = 2.0$, 3.0, y 4.0 s, las cuales se muestran en la figura 19.

Problema muestra 6 Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo a una velocidad de 25.2 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a su punto más elevado? (b) ¿A qué altura se eleva? (c) ¿En cuánto tiempo estará a 27.0 m sobre el suelo?

t s	y m	v m/s	a m/s ²
0	0	0	-9.8
1.0	-4.9	-9.8	-9.8
2.0	-19.6	-19.6	-9.8
3.0	-44.1	-29.4	-9.8
4.0	-78.4	-39.2	-9.8

Figura 19 Problema muestra 5. Se muestran la altura, la velocidad y la aceleración de un cuerpo en caída libre.

Solución (a) En su punto más elevado su velocidad pasa por el valor cero. Dadas v_0 y v ($= 0$), deseamos hallar t y, por lo tanto, elegimos la ecuación 23, con la cual resolvemos para t :

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{25.2 \text{ m/s} - 0}{9.8 \text{ m/s}^2} = 2.57 \text{ s}.$$

(b) Usemos solamente los datos originales en esta parte, para evitar que se introduzca algún error que pudiéramos haber cometido en la parte (a). La ecuación 25, con y_0 asignada como 0, nos permite resolver para y cuando conocemos las otras cantidades:

$$y = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(25.2 \text{ m/s})^2 - 0}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 32.4 \text{ m}.$$

(c) La ecuación 24 es útil para este caso, porque t es la única incógnita. Puesto que deseamos resolver para t , reescribamos la ecuación 24, con $y_0 = 0$, en la forma usual de una ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + y = 0$$

$$\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t^2 - (25.2 \text{ m/s})t + 27.0 \text{ m} = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática, hallamos que las soluciones son $t = 1.52$ s y $t = 3.62$ s. En $t = 1.52$ s, la velocidad de la pelota es

$$v = v_0 - gt = 25.2 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(1.52 \text{ s}) = 10.3 \text{ m/s}.$$

En $t = 3.62$ s, la velocidad es

$$v = v_0 - gt = 25.2 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(3.62 \text{ s}) = -10.3 \text{ m/s}.$$

Las dos velocidades tienen magnitudes idénticas pero direcciones opuestas. Debemos de convencernos de que, en ausencia de la resistencia del aire, la pelota invierte el mismo tiempo para elevarse a su máxima altura que para bajar la misma distancia y que, en cada punto, tendrá la misma velocidad para ir hacia arriba que para caer hacia abajo. Nótese que la respuesta a la parte (a) para el tiempo que le toma llegar al punto más elevado, 2.57 s, es exactamente el punto medio entre los dos tiempos hallados en la parte (c). ¿Puede usted explicar esto? ¿Puede usted predecir cualitativamente el efecto de la resistencia del aire en los tiempos de subida y de caída?

Problema muestra 7 Un cohete es lanzado desde el reposo en una base submarina situada a 125 m bajo la superficie de un volumen de agua. Se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración desconocida pero que se supone constante (el efecto combinado de sus motores, la gravedad de la Tierra, y la flotabilidad y arrastre del agua), y llega a la superficie en un tiempo de 2.15 s. Cuando traspasa la superficie sus motores se apagan automáticamente (para hacer más difícil su detección) y continúa elevándose. ¿A qué altura máxima llegará? (Desprecie cualquier efecto en la superficie).

Solución Como con cualquier proyectil en caída libre, podríamos analizar el movimiento del cohete durante la porción de su movimiento en el aire si conociéramos la velocidad inicial de esa parte del movimiento. El plan de ataque en este problema es, por lo tanto, analizar la porción del movimiento bajo el agua para hallar la velocidad cuando el cohete llega a la superficie, y luego tratar esta velocidad como la velocidad inicial de la porción en caída libre. Estas partes deben hacerse separadamente, porque la aceleración cambia en la superficie del agua.

Para el movimiento bajo el agua, conocemos el desplazamiento, el tiempo, y la velocidad inicial (cero). La aceleración no es necesaria, pero deseamos conocer la velocidad final; la ecuación 21 de la tabla 2 proporciona la relación adecuada:

$$v = \frac{2(y - y_0)}{t} = \frac{2(125 \text{ m})}{2.15 \text{ s}} = 116 \text{ m/s}.$$

La velocidad en la superficie es de 116 m/s hacia arriba. Analizamos ahora la porción de caída libre del movimiento hacia arriba, considerando que esta velocidad es la velocidad *inicial*. Usamos la ecuación 25 para la caída libre y, como es usual, hallamos la altura máxima buscando el punto en el cual la velocidad llega a cero:

$$y - y_0 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(116 \text{ m/s})^2 - 0}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 687 \text{ m}.$$

Para verificar su comprensión del problema, deberá usted dibujar gráficas de $y(t)$, $v(t)$, y $a(t)$ de manera similar a la figura 16. Asegúrese de tener en mente qué variables varían de manera continua y suave, y cuáles no lo hacen así en este problema idealizado. ¿En qué diferiría un cohete real de este cuadro?

2-8 GALILEO Y LA CAÍDA LIBRE (Opcional)

La naturaleza del movimiento de un objeto al caer era en la antigüedad un tema de interés en la filosofía natural. Aristóteles

afirmaba que “el movimiento hacia abajo... de cualquier cuerpo dotado de peso es más rápido en proporción a su tamaño”. Esto es, los objetos más pesados caen más rápidamente. Muchos siglos más tarde, Galileo Galilei (1564-1642) hizo la aseveración correcta: “si pudiéramos eliminar totalmente la resistencia del medio, todos los objetos caerían a igual velocidad”. En los últimos años de su vida, Galileo escribió el tratado titulado *Diálogos concernientes a dos nuevas ciencias* en el cual detallaba sus estudios sobre el movimiento.

La creencia de Aristóteles de que un objeto más pesado caería más aprisa es un punto de vista ampliamente generalizado. Ello parece recibir el apoyo de una bien conocida conferencia en la cual se demostraba que cuando una pelota y una hoja de papel se dejan caer en el mismo instante, la bola llega al suelo mucho antes que el papel. Sin embargo, si el conferencista arruga primero fuertemente el papel y luego repite la demostración, tanto la pelota como el papel golpean el suelo esencialmente al mismo tiempo. En el caso anterior, es el efecto de la mayor resistencia del aire lo que hace que el papel caiga más lentamente que la pelota. En el último caso, el efecto de la resistencia sobre el papel se reduce y es casi el mismo para ambos cuerpos, de modo que caen aproximadamente a la misma velocidad. Por supuesto, que podemos hacer una prueba directa si dejamos caer los cuerpos en el vacío. Aun en vacíos parciales fácilmente obtenidos podemos demostrar que una pluma y una bola de plomo miles de veces más pesada caen a velocidades que son prácticamente indistinguibles entre sí. En 1971, el astronauta David Scott soltó una pluma y un martillo de geólogo en la Luna (sin atmósfera), observando que (dentro del error experimental de su observación) llegaban a la superficie lunar al mismo tiempo.

Sin embargo, en tiempos de Galileo no había una manera eficaz de obtener un vacío parcial, ni existía el equipo para medir el tiempo de cuerpos en caída libre con la precisión suficiente para obtener datos numéricos confiables. (La conocida historia acerca de que Galileo dejó caer dos objetos desde la torre de Pisa y observó su caída comprobando que llegaban al suelo al mismo tiempo es casi con seguridad sólo una leyenda. Dada la altura de la torre y los objetos que se dice usó Galileo, el objeto más grande y más pesado habría alcanzado el suelo entre uno y varios metros antes que el objeto más ligero, debido a los efectos de la resistencia del aire. Así pues, Galileo habría parecido demostrar que Aristóteles ¡tenía razón, después de todo!) Sin embargo, Galileo comprobó su resultado usando una bola que rodara hacia abajo en un plano inclinado. Demostró primero que la cinemática de una bola que rodaba hacia abajo en un plano inclinado era la misma que la de una bola en caída libre. El plano inclinado sirvió únicamente para reducir el efecto de aceleración de la gravedad de la Tierra, haciendo por lo tanto más lento el movimiento, de manera que pudieran hacerse las mediciones con mayor facilidad. Más aún, a velocidades lentas la resistencia del aire es mucho menos importante.

Galileo encontró con sus experimentos que las distancias recorridas en intervalos de tiempo consecutivos eran proporcionales a los números impares 1, 3, 5, 7, ... etc. Las distancias totales para intervalos consecutivos eran entonces proporcionales a 1, 1 + 3 (= 4), 1 + 3 + 5 (= 9), 1 + 3 + 5 + 7 (= 16), y así sucesivamente, esto es, a los cuadrados de los enteros 1, 2, 3, 4, y así sucesivamente. Pero si la distancia cubierta es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido, entonces la ganancia en velocidad es directamente proporcional al tiempo transcurrido, un resultado que se mantiene sólo en el caso de la aceleración constante. Finalmente, Galileo encontró que se mantenían los mismos resultados cualquiera que fuese la masa de la bola y, por lo tanto, en nuestra terminología, la aceleración en caída libre es independiente de la masa del objeto. ■

2-9 MEDICIÓN DE LA ACELERACIÓN EN CAÍDA LIBRE (Opcional)

La medición de g es un ejercicio común en los laboratorios de física introductorios. Puede hacerse simplemente tomando el tiempo de un objeto en caída libre que se suelta desde el reposo a lo largo de una distancia medida. La ecuación 24 da g directamente. Aun con el equipo relativamente tosco normalmente encontrado en los laboratorios para estudiantes, es posible obtener una precisión de alrededor del 1%. Un mejor método consiste en el uso de un péndulo, cuya fuerza impulsora es la atracción de la Tierra sobre el peso suspendido. Como demostramos en el capítulo 15, el valor de g puede ser hallado midiendo el periodo de oscilación de un péndulo de longitud conocida. Tomando el tiempo de muchas oscilaciones, puede hallarse un valor preciso para el periodo, y aun usando el equipo típico de un laboratorio para estudiantes no es difícil de obtener una precisión del 0.1%. Este nivel de precisión es suficiente para observar la variación de g entre el nivel del mar y una montaña elevada (de 3 km o 10,000 ft), o entre el ecuador y los polos de la Tierra.

Durante varios siglos se utilizó el método del péndulo para mediciones precisas de g , y la precisión final fue de aproximadamente 1 parte en 10^6 , suficiente para detectar variaciones de g desde un piso de un edificio al piso siguiente. Los métodos del péndulo se limitan a esta precisión por la incertidumbre del comportamiento real en el punto de pivoteo, lo cual hace difícil determinar la longitud con mayor precisión. Recientemente, en sus intentos para mejorar la precisión de g , los investigadores han retornado al método de la caída libre para la medición de g , la cual a través de las técnicas modernas del interferómetro de láser ha llegado a alrededor de 1 parte en 10^9 . Este método es suficiente para observar el cambio de la gravedad de la Tierra en una distancia vertical de 1 cm; en forma equivalente, tal medición de la gravedad puede detectar el cambio gravitatorio provocado por un científico que se halle de pie a 1 m del aparato!

La obtención de tal precisión constituye un tributo notable a las técnicas experimentales más cuidadosas. Por ejemplo, uno podría suponer que para eliminar los efectos de la resistencia del aire en la caída libre el objeto debe dejarse caer en el vacío. Esto, en efecto, es así, pero aun los mejores vacíos actualmente obtenibles en el laboratorio no son suficientemente buenos para obtener un nivel de precisión de 10^9 en la medición de g . Para reducir los efectos de la pequeñísima cantidad de gas residual presente aun al alto vacío, el objeto en caída libre se coloca dentro de una caja evacuada, la cual también se deja caer. La pequeña cantidad de gas residual es acarreada por la caja al caer, y a causa de que el gas cae con el objeto no ofrece resistencia alguna a la caída libre.

La figura 20 muestra una representación del aparato de caída libre desarrollado por el Dr. James E. Faller y sus colegas en el Joint Institute for Laboratory Astrophysics, en Boulder, Colorado. El objeto que cae es un prisma reflector, el cual es en esencia un prisma de cristal que tiene una capa reflejante en las tres caras perpendiculares. Este dispositivo tiene la útil propiedad de que la luz que incide en el prisma desde cualquier dirección interior se refleja en la dirección exactamente opuesta. (Un conjunto de tales reflectores fue colocado en la Luna por los astronautas del Apolo; se han reflejado rayos láser de la Luna a la Tierra para medir con precisión la distancia Tierra-Luna.) Un rayo láser se refleja del objeto que cae y se hace que los rayos incidente y reflejado interfieran entre sí de modo que continuamente se refuercen y luego se cancelen según cae el objeto. La distancia de la caída entre cancelaciones es la longitud de onda de la luz, y la distancia total de la caída puede

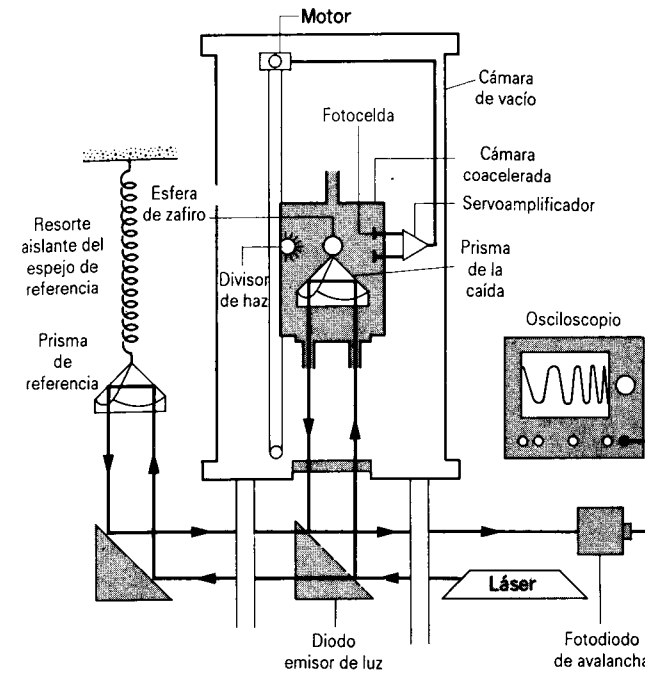


Figura 20 Diagrama del aparato de caída libre. El osciloscopio registra el patrón de cambio de las cancelaciones y los refuerzos cuando el rayo láser reflejado por el prisma de la caída se recombina con el rayo de la arista del prisma de referencia. Un motor impulsa a la cámara de coaceleración hacia abajo de modo que caiga con el prisma. Para una descripción de este aparato y un estudio de las mediciones de g , véase “Ballistic Methods of Measuring g ” por J. E. Faller e I. Marson, *Metrologia*, vol. 25 (1988), pág. 49.

medirse con una precisión de una pequeña fracción de la longitud de onda de la luz, simplemente contando el número de cancelaciones. Simultáneamente, el tiempo entre cancelaciones se mide con un reloj atómico. Así pues, la distancia y el tiempo son medidos en forma simultánea, justo como lo podría usted hacer en un laboratorio introductorio de física. En la figura 21 se muestra una fotografía de este notable aparato.

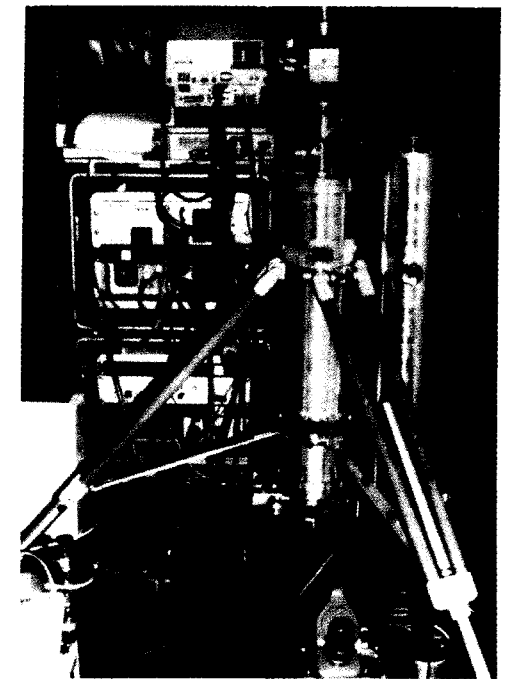


Figura 21 Una fotografía del aparato de caída libre de la figura 20. El aparato es fácilmente portátil, de modo que g pueda ser medida en lugares remotos.

La construcción de los medidores de la gravedad más precisos tiene importantes consecuencias prácticas. Un mapa de la gravedad de la Tierra puede ayudar en la búsqueda de petróleo o de minerales (véase la figura 5 del capítulo 16). Los cambios en la corteza de la tierra con el tiempo pueden ser observados por su efecto sobre g , haciendo posible el monitoreo de los movimientos de placas y de la actividad sísmica. Tales variaciones de la gravedad en la superficie de la Tierra pueden afectar las órbitas de los satélites y las trayectorias de los proyectiles balísticos. Desde el punto de vista de la ciencia básica, las mediciones precisas de g proporcionan pruebas detalladas de nuestra comprensión de la teoría de la gravitación, creada por Isaac Newton hace más de tres siglos. ■

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

PREGUNTAS

1. ¿Puede la velocidad de una partícula ser siempre negativa? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
2. Un conejo se mueve a cada segundo la mitad de la distancia que media desde su nariz hasta una lechuga. ¿Llegará el conejo a la lechuga alguna vez? ¿Cuál es el valor límite de la velocidad promedio del conejo? Dibuje gráficas que muestren la velocidad y la posición del conejo en el transcurso del tiempo.
3. La *velocidad promedio* puede significar la magnitud de la velocidad promedio. Otro significado, más común, que se le da es que la velocidad promedio es la longitud total de la trayectoria recorrida dividida por el tiempo transcurrido. ¿Son diferentes estos significados? Dé un ejemplo que respalde la respuesta.
4. Un automóvil de carreras, en una prueba de dos vueltas para calificar, recorre la primera vuelta a una velocidad

promedio de 90 mi/h. El conductor quiere acelerar durante la segunda vuelta de modo que la velocidad promedio de las dos vueltas sea de 180 mi/h. Demuestre que no podrá hacerlo.

5. Roberto le gana a Judith por 10 m en una carrera de los 100 metros. Roberto, queriendo darle a Judith una oportunidad igual, acuerda correr con ella de nuevo pero arrancar desde 10 m atrás de la línea de arranque. Le da esto a Judith, en realidad una oportunidad igual?
6. Cuando la velocidad es constante, ¿puede la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo diferir de la velocidad instantánea en cualquier instante? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
7. ¿Puede la velocidad promedio de una partícula que se mueve a lo largo del eje x ser alguna vez $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ si la aceleración no es uniforme? Demuestre su respuesta mediante gráficas.
8. ¿Puede el velocímetro de un automóvil registrar la velocidad como la hemos definido?
9. (a) ¿Puede un objeto tener velocidad cero y aun así acelerar? (b) ¿Puede un objeto tener una velocidad constante al mismo tiempo que una rapidez variable? En cada caso, dé un ejemplo en caso de que la respuesta sea afirmativa; explique por qué, si la respuesta es que no.
10. ¿Puede la velocidad de un objeto invertir la dirección cuando su aceleración es constante? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
11. La figura 30 muestra al coronel John P. Stapp en su trineo cohete al frenar; véase el problema 34. (a) Su cuerpo es un acelerómetro, no un taquímetro (medidor de la velocidad). Explique. (b) ¿Puede usted saber la dirección de la aceleración a partir de la figura?
12. ¿Puede un objeto aumentar su velocidad mientras su aceleración decrece? De ser así, dé un ejemplo; si no, explique por qué.
13. De las siguientes situaciones, ¿cuál es imposible? (a) Un cuerpo tiene velocidad este y aceleración este; (b) un cuerpo tiene velocidad este y aceleración oeste; (c) un cuerpo tiene velocidad cero, y la aceleración distinta de cero; (d) un cuerpo tiene aceleración constante pero su velocidad es variable; (e) un cuerpo tiene velocidad constante y aceleración variable.
14. ¿Cuáles serían algunos ejemplos de caídas de objetos en los que no sería razonable despreciar la resistencia del aire?
15. La figura 22 muestra una torre para la fabricación de perdigones en Baltimore, Maryland, en Estados Unidos. Fue construida en 1829 y usada para fabricar perdigones de plomo mediante el derramamiento del plomo fundido a través de un cedazo desde la parte superior de la torre. Los perdigones se solidifican al tiempo que caen en un tanque de agua situado en el fondo de la torre a 230 ft de profundidad. ¿Cuáles son las ventajas de fabricar perdigones de este modo?
16. Una persona de pie en el borde de un acantilado a cierta altura sobre el nivel del suelo arroja una pelota hacia arriba a una velocidad inicial v y luego arroja otra pelota hacia abajo con la misma velocidad inicial. ¿Cuál de ellas,



Figura 22 Pregunta 15

si hay alguna, tiene la velocidad mayor cuando llegue al suelo? Desprecie la resistencia del aire.

17. ¿Cuál es la aceleración hacia abajo de un proyectil que sea disparado desde un cohete que acelera hacia arriba a razón de 9.8 m/s^2 ?
18. La ecuación 19 para la aceleración constante nos dice que si una partícula es lanzada desde el reposo ($v_0 = 0$) a $x_0 = 0$ en el tiempo $t = 0$ está en la posición x en dos tiempos diferentes, digamos $+\sqrt{2x/a}$ y $-\sqrt{2x/a}$. ¿Cuál es el significado de la raíz negativa de esta ecuación cuadrática?
19. En otro planeta, el valor de g es la mitad del valor en la Tierra. ¿Cuánto es el tiempo que necesita un objeto para caer al suelo partiendo del reposo en relación con el tiempo requerido para caer la misma distancia en la Tierra?
20. (a) Una piedra es arrojada hacia arriba con una cierta velocidad en un planeta en donde la aceleración en caída libre es el doble que en la Tierra. ¿Qué tan alto se elevaría en comparación con la altura a la que lo haría en la Tierra? (b) Si la velocidad inicial se duplicara, ¿qué cambio significaría?
21. Consideremos una pelota que es arrojada verticalmente hacia arriba. Tomando en cuenta la resistencia del aire.

¿Cree usted que el tiempo durante el cual se eleva la pelota es más largo o más corto que el tiempo durante el cual cae? ¿Por qué?

22. Elabore una gráfica cualitativa de la rapidez v versus el tiempo t para la caída de un objeto (a) despreciando la resistencia del aire, y (b) si la resistencia del aire no puede despreciarse.
23. Una segunda bola se deja caer en el tiro de un elevador 1 s después de haberse dejado caer la primera. (a) ¿Qué pasa con la distancia entre una y otra a medida que pasa el tiempo? (b) ¿Cómo cambia la relación v_1/v_2 de la velocidad de la primera bola y la velocidad de la segunda con el paso del tiempo? Desprecie la resistencia del aire, y dé respuestas cualitativas.
24. Repita la pregunta 23 tomando en cuenta la resistencia del aire. Una vez más, dé respuestas cualitativas.
25. Si m es una piedra ligera y M es una piedra pesada, según Aristóteles M caería más rápidamente que m . Galileo intentó demostrar que la creencia de Aristóteles era lógicamente inconsistente con el siguiente argumento. Átense m y M

juntas formando una piedra doble. Así, al caer, m debería retrasar la caída de M , puesto que tiende a caer más lentamente, y la combinación caería más rápido que m pero más lentamente que M ; sin embargo, según Aristóteles el doble cuerpo ($M + m$) es más pesado que M y, por lo tanto, debería caer más rápido que M . Si aceptamos el razonamiento de Galileo como correcto, ¿podemos concluir que M y m deben caer a la misma velocidad? ¿Qué experimento sería necesario en este caso? Si usted cree que el razonamiento de Galileo es incorrecto, explique por qué.

26. ¿Qué les pasaría a nuestras ecuaciones cinemáticas (véase la tabla 2) bajo la operación de una inversión del tiempo, es decir, reemplazando a t por $-t$? Explique.
27. Esperamos que una relación realmente general, tal como las de la tabla 2, sea válida sin importar la elección del sistema de coordenadas. Al exigir que las ecuaciones generales sean dimensionalmente compatibles nos aseguramos de que las ecuaciones sean válidas cualquiera que sea la elección de las unidades. ¿Hay alguna necesidad, entonces, de sistemas de unidades o de coordenadas?

PROBLEMAS

Sección 2-3 Velocidad promedio

1. ¿A qué distancia viaja hacia adelante un automóvil que se mueve a razón de 55 mi/h ($= 88 \text{ km/h}$) durante 1 s de tiempo, que es lo que le toma ver un accidente al lado de la carretera?
2. El lanzador de los Medias Rojas de Boston, Roger Clemens, lanzó una bola rápida a una velocidad horizontal de 160 km/h, según fue verificado con una pistola de radar. ¿Qué tanto le tomó a la bola llegar a la base de meta, que está a una distancia de 18.4 m?
3. La figura 23 muestra la relación entre la edad, en millones de años, del sedimento más antiguo y la distancia, en kilómetros, a la que fue hallado el sedimento desde un arrecife en particular en el océano. El material del lecho marino se desprende de este arrecife y se aleja de él a una velocidad aproximadamente uniforme. Halle la velocidad, en centímetros por año, a la que este material se aleja del arrecife.

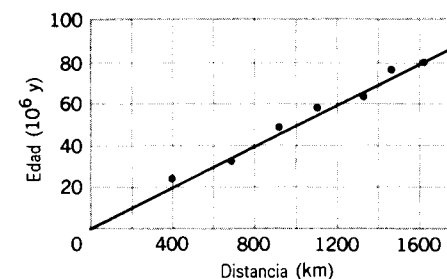


Figura 23 Problema 3.

4. Carl Lewis corre los 100 metros planos en aproximadamente 10 s, y Bill Rodgers corre el maratón (26 mi, 385 yd) en aproximadamente 2 h 10 min. (a) ¿Cuáles son sus promedios de velocidad? (b) Si Carl Lewis pudiera mantener la velocidad de su carrera durante un maratón, ¿cuánto le tomaría llegar a la meta?
5. Durante muchos meses un bien conocido físico de alta energía se trasladaba semanalmente entre Boston, Massachusetts y Ginebra, Suiza, ciudades que están separadas por una distancia de 4000 mi. ¿Cuál fue la velocidad promedio del físico durante esa época? ¿Le sorprende que no se necesite saber la velocidad del avión para resolver este problema?
6. El límite legal de velocidad en una autopista se cambia de 55 mi/h ($= 88.5 \text{ km/h}$) a 65 mi/h ($= 104.6 \text{ km/h}$). ¿Cuánto tiempo ahorrará cualquiera viajando a velocidad más alta desde la entrada en Buffalo a la salida en la ciudad de Nueva York de la autopista estatal de Nueva York en este tramo de carretera de 435 mi ($= 700 \text{ km}$)?
7. Usted viaja en la carretera interestatal 10 de San Antonio a Houston, la mitad del tiempo a 35 mi/h (56.3 km/h) y la otra mitad a 55 mi/h ($= 88.5 \text{ km/h}$). En el viaje de regreso usted viaja la mitad de la distancia a 35 mi/h y la otra mitad a 55 mi/h. ¿Cuál es la velocidad promedio (a) de San Antonio a Houston, (b) de Houston a San Antonio, y (c) para todo el viaje?
8. Un avión de propulsión a chorro (jet) de alto desempeño, que realiza maniobras para evitar el radar, está en vuelo horizontal a 35 m sobre el nivel del terreno. Súbitamente, el avión encuentra que el terreno sube cuesta arriba en 4.3° ,

una cantidad difícil de detectar; véase la figura 24. ¿Cuánto tiempo tiene el piloto para hacer una corrección si ha de evitar que el avión toque el terreno? La velocidad del aire es de 1300 km/h.

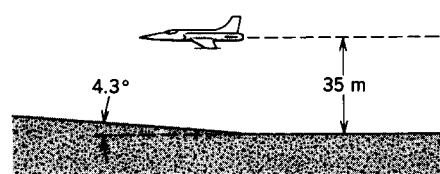


Figura 24 Problema 8.

9. La posición de un objeto que se mueve en línea recta está dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, donde x está en metros y t está en segundos. (a) ¿Cuál es la posición del objeto en $t = 0, 1, 2, 3$ y 4 s? (b) ¿Cuál es el desplazamiento del objeto entre $t = 0$ y $t = 2$ s? ¿Y entre $t = 0$ y $t = 4$ s? ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre $t = 2$ y $t = 4$ s? ¿Y desde $t = 0$ hasta $t = 3$ s?
10. Un automóvil sube una pendiente a la velocidad constante de 40 km/h y retorna cuesta abajo a la velocidad de 60 km/h. Calcule la velocidad promedio del viaje redondo.
11. Calcule la velocidad promedio en los dos casos siguientes: (a) Usted camina 240 ft a razón de 4 ft/s y luego corre 240 ft a razón de 10 ft/s a lo largo de una pista recta. (b) Usted camina durante 1.0 min a razón de 4 ft/s y luego corre durante 1.0 min a razón de 10 ft/s a lo largo de una pista recta.
12. Dos trenes, cada uno a una velocidad de 34 km/h, corren uno hacia el otro en la misma vía recta. Un pájaro que puede volar a 58 km/h vuela saliendo del frente de un tren cuando los trenes están separados por una distancia de 102 km y va directamente hacia el otro tren. Al llegar al otro tren vuela de regreso hasta el primer tren, y así sucesivamente. (a) ¿Cuántos viajes podrá hacer el pájaro de un tren a otro antes de que los trenes choquen? (b) ¿Cuál es la distancia total que recorre volando el pájaro?

Sección 2-4 Velocidad instantánea

13. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x está dada en centímetros por $x = 9.75 + 1.50t^2$, donde t está en segundos. Considere el intervalo de tiempo de $t = 2$ a $t = 3$ y calcule (a) la velocidad promedio; (b) la velocidad instantánea en $t = 2$ s; (c) la velocidad instantánea en $t = 3$ s; (d) la velocidad instantánea en $t = 2.5$ s; y (e) la velocidad instantánea cuando la partícula está a medio camino entre sus posiciones en $t = 2$ y $t = 3$ s.
14. ¿Qué distancia recorre en 16 s el corredor cuya gráfica velocidad-tiempo se muestra en la figura 25?

Sección 2-5 Movimiento acelerado

15. ¿Cuál es la aceleración en $t = 11$ s del corredor del problema 14?

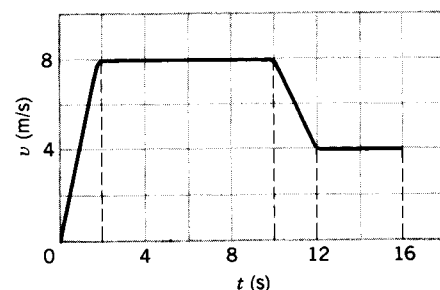


Figura 25 Problemas 14 y 15.

16. Una partícula tenía una velocidad de 18 m/s en dirección $+x$, y 2.4 s más tarde su velocidad era de 30 m/s en dirección opuesta. ¿Cuál fue la aceleración promedio de la partícula durante este intervalo de 2.4 s?
17. Un objeto se mueve en línea recta según se describe en la gráfica velocidad-tiempo de la figura 26. Trace una gráfica que represente la aceleración del objeto en función del tiempo.

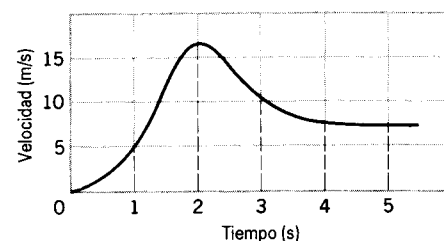


Figura 26 Problema 17.

18. La gráfica de x contra t de la figura 27a es de una partícula que se mueve en línea recta. (a) Determine para cada intervalo si la velocidad v es $+$, $-$, ó 0 , y si la aceleración a es $+$, $-$, ó 0 . Los intervalos son OA , AB , BC , y CD . (b) Según la curva, ¿existe un intervalo en el cual la aceleración sea obviamente no constante? (Desprecie el comportamiento en los extremos de los intervalos.)
19. Responda las preguntas anteriores para el movimiento descrito por la gráfica de la figura 27b.
20. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con un desplazamiento contra tiempo como se muestra en la figura 28. Esboce las curvas de velocidad contra tiempo y de aceleración contra tiempo para este movimiento.
21. Para cada una de las situaciones siguientes, trace una gráfica que sea una descripción posible de la posición en función del tiempo de una partícula que se mueve a lo largo del eje x . En $t = 1$ s, la partícula tiene (a) velocidad cero y aceleración positiva; (b) velocidad cero y aceleración negativa; (c) velocidad negativa y aceleración positiva; (d) velocidad negativa y aceleración negativa. (e) ¿En cuál de estas situaciones aumentará la velocidad de esta partícula en $t = 1$ s?
22. Si la posición de un objeto está dada por $x = 2t^3$, donde x está en metros y t en segundos, halle (a) la velocidad

(¿en unidades?) contra el tiempo. (e) Partiendo de la curva de la parte (d) determine la aceleración de la partícula en los tiempos $t = 2, 3$, y 4 s.

26. La posición de una partícula a lo largo del eje x depende del tiempo de acuerdo con la ecuación

$$x = At^2 - Bt^3,$$

donde x está en metros y t en segundos. (a) ¿Qué unidades SI deberán tener A y B ? Para lo siguiente, haga que sus valores numéricos en unidades SI sean 3 y 1, respectivamente. (b) ¿En qué tiempo llegará la partícula a su posición x positiva máxima? (c) ¿Qué longitud de trayectoria cubre la partícula en los primeros 4 s? (d) ¿Cuál es su desplazamiento durante los primeros 4 s? (e) ¿Cuál es la velocidad de la partícula al final de cada uno de los primeros cuatro segundos? (f) ¿Cuál es la aceleración de la partícula al final de cada uno de los primeros cuatro segundos? (g) ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo de $t = 2$ a $t = 4$ s?

27. Un electrón que arranca desde el reposo tiene una aceleración que aumenta linealmente con el tiempo, esto es, $a = kt$, donde k ($1.50 \text{ m/s}^2/\text{s}$) o 1.50 m/s^3 . (a) Trace a contra t durante el primer intervalo de 10 s. (b) A partir de la curva de la parte (a) trace la curva v contra t correspondiente y calcule la velocidad del electrón 5 s después de haber comenzado el movimiento. (c) A partir de la curva v contra t de la parte (b) trace la curva x contra t correspondiente y calcule qué tanto se ha movido el electrón durante los primeros 5 s de su movimiento.

28. En una galería de juegos de video, un punto está programado para moverse a través de la pantalla de acuerdo a $x = 9.00t - 0.750t^3$, donde x es la distancia en centímetros medida desde el borde izquierdo de la pantalla y t es el tiempo en segundos. Cuando el punto llega al borde de la pantalla, ya sea en $x = 0$ o en $x = 15$ cm, comienza de nuevo. (a) ¿En qué tiempo después del arranque llega el punto instantáneamente al reposo? (b) ¿Cuándo ocurre esto? (c) ¿Cuál es su aceleración cuando esto ocurre? (d) ¿En qué dirección se mueve en el siguiente instante después de llegar al reposo? (e) ¿Cuándo se sale de la pantalla?

Sección 2-6 Movimiento con aceleración constante

29. Un jumbo de propulsión a chorro necesita alcanzar una velocidad de 360 km/h ($= 224 \text{ mi/h}$) sobre la pista para despegar. Suponiendo una aceleración constante y una pista de 1.8 km ($= 1.1 \text{ mi}$) de longitud, ¿qué aceleración mínima se requiere partiendo del reposo?
30. Un vehículo cohete se mueve en el espacio libre con una aceleración constante igual a 9.8 m/s^2 . (a) Si arranca del reposo, ¿qué tanto le tomará adquirir una velocidad de un décimo de la velocidad de la luz? (b) ¿Qué tan lejos viajará al hacerlo así? (La velocidad de la luz es de $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$).
31. La cabeza de una serpiente de cascabel puede acelerar a razón de 50 m/s^2 al atacar a su víctima. Si un automóvil lo hiciera también, ¿cuánto le tomaría llegar a una velocidad de 100 km/h desde el reposo?
32. Un muon (una partícula elemental) es disparado a una velocidad inicial de $5.20 \times 10^6 \text{ m/s}$ a una región donde un

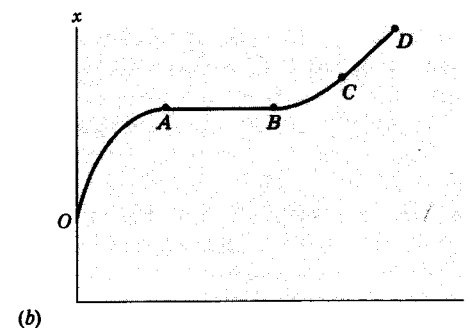
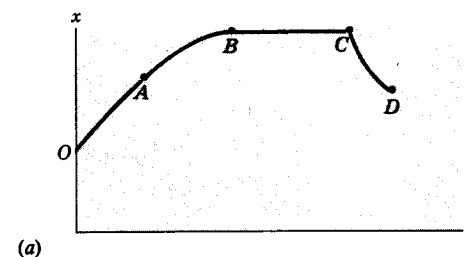


Figura 27 (a) Problema 18 y (b) problema 19.

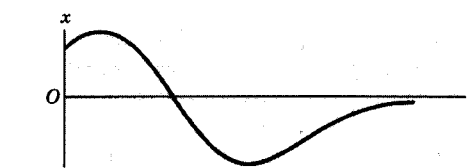


Figura 28 Problema 20.

promedio y la aceleración promedio entre $t = 1$ y $t = 2$ s, y (b) las velocidades instantáneas y las aceleraciones instantáneas en $t = 1$ y $t = 2$ s. (c) Compare las cantidades promedio e instantánea y en cada caso explique por qué la mayor es mayor.

23. Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación $x = 50t + 10t^2$, donde x está en metros y t en segundos. Calcule (a) la velocidad promedio de la partícula durante los primeros 3 s de movimiento, (b) la velocidad instantánea de la partícula en $t = 3$ s, y (c) la aceleración instantánea de la partícula en $t = 3$ s.
24. Un hombre está quieto desde $t = 0$ hasta $t = 5$ min; de $t = 5$ a $t = 10$ min camina vivamente en línea recta a una velocidad constante de 2.2 m/s. ¿Cuáles son su velocidad promedio y su aceleración promedio durante los intervalos de tiempo (a) de 2 min a 8 min, y (b) de 3 min a 9 min?
25. Una partícula que se mueve a lo largo del eje x positivo tiene las siguientes posiciones en tiempos diversos:

x (m)	0.080	0.050	0.040	0.050	0.080	0.13	0.20
t (s)	0	1	2	3	4	5	6

- (a) Trace el desplazamiento (no la posición) contra el tiempo. (b) Halle la velocidad promedio de la partícula en los intervalos de 0 a 1 s, de 0 a 2 s, de 0 a 3 s, de 0 a 4 s. (c) Halle la pendiente de la curva trazada en la parte (a) en los puntos $t = 0, 1, 2, 3, 4$, y 5 s. (d) Trace la pendiente

campo eléctrico produce una aceleración de $1.30 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$ en dirección contraria a la velocidad inicial. ¿Qué distancia recorrerá el muon antes de llegar al reposo?

33. Un electrón con velocidad inicial $v_0 = 1.5 \times 10^5 \text{ m/s}$ entra en una región de 1.2 cm de longitud donde es eléctricamente acelerado (véase la figura 29). Sale con una velocidad $v = 5.8 \times 10^6 \text{ m/s}$. Cuál fue su aceleración, suponiendo que haya sido constante? (Tal proceso ocurre en el cañón de electrones de un tubo de rayos catódicos, usado en receptores de televisión y en terminales de video.)

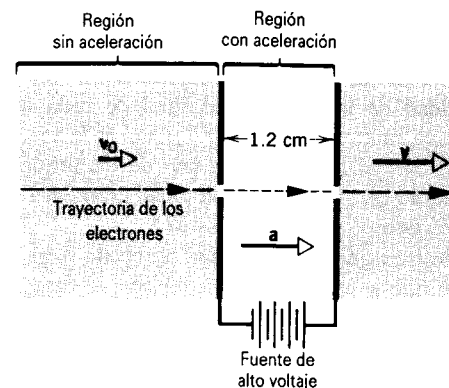


Figura 29 Problema 33.

34. El coronel John P. Stapp estableció un record mundial de velocidad cuando, el 19 de marzo de 1954, rodó un trineo autopropulsado que se movió en los carriles a razón de 1020 km/h. Él y su trineo llegaron a un alto total en 1.4 s; véase la figura 30. ¿Qué aceleración experimentó? Expresese la respuesta en términos de g ($= 9.8 \text{ m/s}^2$), la aceleración debida a la gravedad. (Nótese que su cuerpo actúa como un acelerómetro, y no como un velocímetro.)



Figura 30 Problema 34.

35. Los frenos de su automóvil son capaces de crear una desaceleración de 17 ft/s^2 . Si usted va a 85 mi/h y de pronto ve a un patrullero, ¿cuál es el tiempo mínimo en el cual

puede usted hacer que su automóvil baje a la velocidad límite de 55 mi/h ?

36. En una carretera seca, un automóvil con buenas llantas puede frenar con una deceleración de $11.0 \text{ mi/h} \cdot \text{s}$ (4.92 m/s^2). (a) ¿Qué tanto tiempo le toma a tal automóvil, que inicialmente viajaba a 55 mi/h ($= 24.6 \text{ m/s}$), llegar al reposo? (b) ¿Qué tan lejos viajó en ese tiempo?
37. Una flecha es disparada hacia arriba en el aire y a su regreso golpea el suelo a 260 ft/s , enterrándose 9 in en el terreno. Halle (a) la aceleración (supuesta como constante) requerida para detener la flecha, y (b) el tiempo necesario para que el terreno la detenga.
38. Supongamos que le piden a usted que asesore a un abogado en relación a la física implicada en uno de sus casos. La pregunta es si un conductor se había excedido del límite de velocidad de 30 mi/h antes de hacer una parada de emergencia, con los frenos accionados a fondo y las llantas patinando. La longitud de las marcas del patinaje sobre la carretera fue 19.2 ft. El oficial de la policía supuso que la deceleración máxima del automóvil no superaría la aceleración de un cuerpo en caída libre ($= 32 \text{ ft/s}^2$) y no impuso una multa al conductor. ¿Estaba excediéndose de la velocidad permitida? Explíquelo.
39. Un tren partió del reposo y se movió con aceleración constante. En un momento dado estaba viajando a 33.0 m/s , y 160 m más adelante lo estaba haciendo a 54.0 m/s . Calcule (a) la aceleración, (b) el tiempo requerido para recorrer 160 m, (c) el tiempo requerido para que alcance una velocidad de 33.0 m/s , y (d) la distancia recorrida desde el reposo hasta el momento en que el tren tuvo una velocidad de 33.0 m/s .
40. Un automóvil que se mueve con aceleración constante cubre la distancia entre dos puntos que distan entre sí 58.0 m en 6.20 s. Su velocidad cuando pasa por el segundo punto es de 15.0 m/s . (a) ¿Cuál es la velocidad en el primer punto? (b) ¿Cuál es su aceleración? (c) ¿A qué distancia previa al primer punto estaba el automóvil en reposo?
41. Un tren subterráneo acelera desde el reposo en una estación ($a = +1.20 \text{ m/s}^2$) durante la primera mitad de la distancia a la siguiente estación y luego decelera hasta el reposo ($a = -1.20 \text{ m/s}^2$) en la segunda mitad de la distancia. La distancia entre las estaciones es de 1.10 km. Halle (a) el tiempo de viaje entre estaciones y (b) la velocidad máxima del tren.
42. La cabina de un elevador en el hotel Marquis Marriott, de Nueva York (véase la figura 31) tiene un recorrido total de 624 ft. Su velocidad máxima es de 1000 ft/min y su aceleración (constante) es de 4.00 ft/s^2 . (a) ¿Qué tan lejos se mueve mientras acelera a toda velocidad desde el reposo? (b) ¿Qué tiempo le toma hacer la carrera, comenzando y terminando en reposo?
43. Cuando un conductor detiene su automóvil lo más súbitamente posible, la distancia de parada puede ser vista como la suma de una "distancia de reacción", la cual es la velocidad inicial multiplicada por el tiempo de reacción, y la "distancia de frenado", la cual es la distancia cubierta durante el frenado. La tabla siguiente da los valores típicos:



Figura 31 Problema 42.

Velocidad inicial (m/s)	Distancia de acción (m)	Distancia de frenado (m)	Distancia de tensión (m)
10	7.5	5.0	12.5
20	15	20	35
30	22.5	45	67.5

(a) ¿Qué tiempo de reacción se supone que tiene el conductor? (b) ¿Cuál es la distancia de frenado del automóvil si la velocidad inicial es de 25 m/s ?

44. En una trampa de velocidad, dos tiras activadas por presión están situadas a una distancia de 110 m cruzando una carretera en la cual el límite de velocidad es 90 km/h . Mientras viaja a 120 km/h , un conductor advierte una patrulla justo cuando activa la primera tira y reduce su marcha. ¿Qué deceleración es necesaria para que la velocidad promedio del automóvil esté dentro del límite de velocidad cuando el automóvil cruce la segunda tira?
45. En el instante en que un semáforo cambia a luz verde, un automóvil arranca con una aceleración constante de 2.2 m/s^2 . En el mismo instante un camión, que viaja a una velocidad constante de 9.5 m/s , alcanza y pasa al automóvil. (a) ¿A qué distancia del punto de arranque el automóvil alcanzaría al camión? (b) ¿A qué velocidad está viajando el automóvil en ese instante? (Es instructivo trazar una gráfica cualitativa de x contra t para cada vehículo.)
46. El maquinista de un tren que se mueve a una velocidad v_1 advierte la presencia de un tren de carga a una distancia d adelante de él que se mueve en la misma vía y en la misma dirección a una velocidad más lenta v_2 . Acciona los frenos e imprime en su tren una deceleración constante a . Demuestre que

$$\text{si } d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \text{ no habrá una colisión;}$$

$$\text{si } d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \text{ habrá una colisión.}$$

(Es instructivo trazar una gráfica cualitativa de x contra t para cada tren.)

47. Un automóvil que viaja a 35 mi/h ($= 56 \text{ km/h}$) está a 110 ft ($= 34 \text{ m}$) de una barrera cuando el conductor pisa de golpe los frenos. Cuatro segundos más tarde el automóvil golpea la barrera. (a) ¿Cuál fue la deceleración constante del automóvil antes del impacto? (b) ¿A qué velocidad viajaba el carro en el momento del impacto?
48. Un corredor, en una carrera de 100 m, acelera desde el reposo hasta la velocidad máxima a razón de 2.80 m/s^2 y mantiene esa velocidad hasta el final de la pista. (a) ¿Qué tiempo transcurrió? (b) ¿Qué distancia recorrió el corredor durante la fase de aceleración si el tiempo total en la pista fue de 12.2 s ?
49. El manual del conductor establece que un automóvil con buenos frenos que vaya a 50 mi/h puede parar en una distancia de 186 ft. La distancia correspondiente a 30 mi/h es de 80 ft. Suponga que el tiempo de reacción del conductor, durante el cual la aceleración es de cero, y la aceleración después de que accionó los frenos son iguales para las dos velocidades. Calcule (a) el tiempo de reacción del conductor, y (b) la aceleración.

Sección 2-7 Cuerpos en caída libre

50. Caen gotas de lluvia desde una nube situada a 1700 m sobre la superficie del suelo. Si no fueran retenidas por la resistencia del aire, ¿a qué velocidad descenderían las gotas cuando llegan al suelo? ¿Sería seguro caminar en el exterior durante una tormenta?
51. Un cable que soporta a un elevador desocupado de una construcción se rompe cuando el elevador está en reposo en la parte más alta de un edificio de 120 m de altura. (a) ¿A qué velocidad golpearía el elevador el terreno? (b) ¿Cuánto tiempo transcurrió en la caída? (c) ¿Cuál era su velocidad cuando pasó por el punto intermedio de su carrera hacia abajo? (d) ¿Durante cuánto tiempo estuvo cayendo cuando pasó por el punto intermedio?
52. En una obra en construcción una llave Stillson golpea el terreno a una velocidad de 24.0 m/s . (a) ¿Desde qué altura cayó inadvertidamente? (b) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?
53. (a) ¿A qué velocidad debe ser arrojada una pelota verticalmente hacia arriba con objeto de que llegue a una altura máxima de 53.7 m ? (b) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?
54. Una roca es arrojada desde un acantilado de 100 m de altura, ¿Cuánto tiempo tarda en caer (a) los primeros 50.0 m y (b) los segundos 50.0 m ?
55. Unos exploradores del espacio "atterrizan" en un planeta de nuestro sistema solar. Ellos observan que una pequeña roca lanzada verticalmente hacia arriba a razón de 14.6 m/s tarda 7.72 s en regresar al suelo. ¿En qué planeta aterrizaron? (Sugerencia: Véase el apéndice C.)
56. Una pelota es arrojada verticalmente a una velocidad inicial de 20.5 m/s desde una altura de 58.8 m . (a) ¿Cuál será su velocidad justo antes de que llegue al suelo? (b) ¿Qué tanto tiempo le tomó a la pelota llegar al suelo? (c) ¿Cuáles serían las respuestas a (a) y a (b) si la pelota

fuera lanzada directamente hacia arriba desde la misma altura y a la misma velocidad inicial?

57. La figura 32 muestra un aparato sencillo para medir el tiempo de reacción. Consta de una tira de cartulina marcada con una escala y dos puntos grandes. Un amigo sostiene la tira entre los dedos pulgar e índice en el punto superior y usted coloca sus dedos pulgar e índice en el punto inferior, teniendo cuidado de no tocar la tira. Su amigo suelta la tira, y usted trata de pescarla tan pronto como sea posible cuando ve que empieza a caer. La marca situada en el lugar en que usted pesca la tira da el tiempo de reacción. ¿A qué distancia del punto inferior se ponen las marcas de 50-, 100-, 200-, y 250-ms?

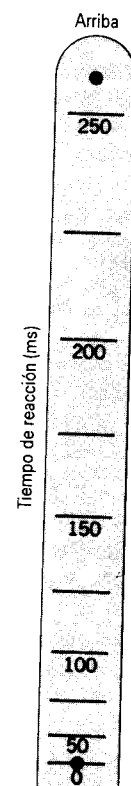


Figura 32 Problema 57.

58. Una pelota arrojada hacia arriba tarda 2.25 s en llegar a una altura de 36.8 m. (a) ¿Cuál fue su velocidad inicial? (b) ¿Cuál es su velocidad a esta altura? (c) ¿Cuánta más altura alcanzará la pelota?
59. Mientras pensaba en Isaac Newton, una persona parada en un puente sobre una carretera deja caer inadvertidamente una manzana desde la barandilla justo cuando el extremo frontal de un camión pasa directamente abajo de la barandilla. Si el vehículo se está moviendo a 55 km/h (= 34 mi/h) y tiene una longitud de 12 m (= 39 ft), ¿qué tanto más arriba del camión deberá estar la barandilla si la manzana no logra golpear la parte trasera del camión?
60. Un cohete es disparado verticalmente y asciende con una aceleración vertical constante de 20 m/s² durante 1.0 min. Su combustible se agota entonces totalmente y continúa

como una partícula en caída libre. (a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada? (b) ¿Cuál es el tiempo total transcurrido desde el despegue hasta que el cohete regresa a la Tierra? (Desprecie las variaciones de g con la altitud).

61. Un jugador de baloncesto, a punto de "encestar" la pelota, salta 76 cm verticalmente. ¿Cuánto tiempo invierte el jugador (a) en los últimos 15 cm de su salto y (b) en los primeros 15 cm de su salto? Ayuda esto a explicar el por qué estos jugadores parecen quedar suspendidos en el aire en la cima de sus saltos. Véase la figura 33.

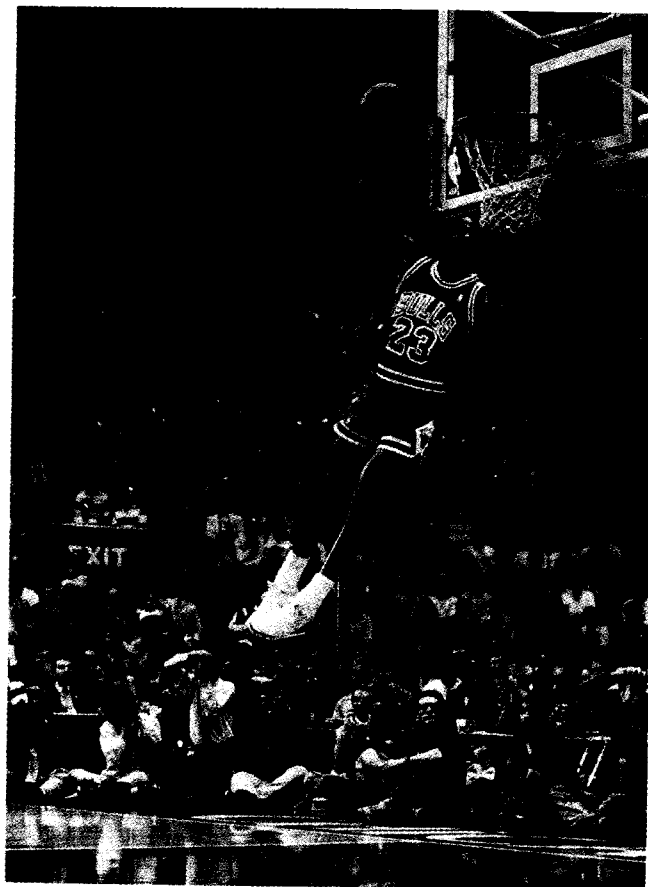


Figura 33 Problema 61.

62. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba. En su trayecto pasa el punto A a una velocidad v , y el punto B, 3.00 m más alto que A, a velocidad $v/2$. Calcule (a) la velocidad v y (b) la altura máxima alcanzada por la piedra arriba del punto B.
63. De la boca de una regadera gotea agua en el piso 200 cm más abajo. Las gotas caen a intervalos de tiempo regulares, la primera gota golpea el piso en el instante en que la cuarta gota comienza a caer. Hallar la ubicación de cada una de las otras gotas cuando una de ellas llega al suelo.
64. La instalación para la investigación de la gravedad cero (the Zero Gravity Research Facility), en el Centro Lewis de investigación de la NASA, incluye una torre de caída de 145 m. Ésta es una torre vertical evacuada en la cual,

entre otras posibilidades, puede dejarse caer una esfera de 1 m de diámetro que contiene un paquete experimental. (a) ¿Cuánto tiempo está este paquete experimental en caída libre? (b) ¿Cuál es su velocidad en la parte inferior de la torre? (c) En la parte inferior de la torre, la esfera experimenta una aceleración promedio de 25g cuando su velocidad se reduce a cero. ¿Qué distancia ha recorrido al llegar al reposo?

65. Una bola se deja caer desde una altura de 2.2 m y rebota a una altura de 1.9 m sobre el suelo. Suponga que la bola está en contacto con el suelo durante 96 ms y determine la aceleración promedio (en magnitud y dirección) de la bola durante su contacto con el suelo.
66. Una mujer cayó 144 ft desde la cima de un edificio, "aterrizando" sobre una caja de ventilación de metal, la cual se hundió a una profundidad de 18 in. Ella sobrevivió sin daños serios. ¿Qué aceleración (se supone uniforme) experimentó durante la colisión? Expresé su respuesta en términos de g .
67. Si un objeto viaja la mitad de su trayectoria total en el último segundo de su caída desde el reposo, halle (a) el tiempo y (b) la altura de su caída. Explique la solución físicamente inaceptable de la ecuación cuadrática del tiempo.
68. Dos objetos comienzan una caída libre desde el reposo partiendo de la misma altura con 1.00 s de diferencia. En cuánto tiempo después de que el primer objeto comenzó a caer estarán los dos objetos separados a una distancia de 10.0 m?
69. Como se ve en la figura 34, Clara salta desde un puente, seguida de cerca por Jaime. ¿Cuánto tiempo esperó Jaime



Figura 34 Problema 69.

después de que Clara saltó? Suponga que Jaime tiene una altura de 170 cm y que el nivel desde el que saltaron está arriba de la fotografía. Haga mediciones escalares directamente en la fotografía.

70. Un globo está ascendiendo a razón de 12.4 m/s a una altura de 81.3 m sobre el nivel del suelo cuando se deja caer desde él un bulto. (a) ¿A qué velocidad golpea el bulto el suelo? (b) ¿Cuánto tiempo le tomó llegar al suelo?
71. Una paracaidista, después de saltar, cae 52.0 m sin fricción. Cuando se abre el paracaídas, ella decelera a razón de 2.10 m/s² y llega al suelo a una velocidad de 2.90 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo estuvo la paracaidista en el aire? (b) ¿A qué altura comenzó la caída?
72. Una bola de plomo se deja caer en una alberca desde un trampolín a 2.6 m sobre el agua. Golpea el agua con una cierta velocidad y luego se hunde hasta el fondo con esta misma velocidad constante. Llega al fondo 0.97 s después de que se ha dejado caer. (a) ¿Qué profundidad tiene la alberca? (b) ¿Supongamos que se deja drenar toda el agua de la alberca. La bola es arrojada de nuevo desde el trampolín de modo que, otra vez, llega al fondo en 0.97 s. ¿Cuál es la velocidad inicial de la bola?
73. En el Laboratorio Nacional de Física de Inglaterra se hizo una medición de la aceleración g arrojando una bola de vidrio hacia arriba en un tubo evacuado y dejándola regresar, como en la figura 35. Sea Δt_L el intervalo de tiempo entre los dos pasos a través del nivel inferior, Δt_U el intervalo de tiempo entre los dos pasos a través del nivel superior, y H la distancia entre los dos niveles. Demuestre que

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$

Figura 35 Problema 73.

74. Una bola de acero se deja caer desde el techo de un edificio (la velocidad inicial de la bola es cero). Un observador parado enfrente de una ventana de 120 cm de altura nota que a la bola le toma 0.125 s caer desde la parte superior de la ventana a la parte inferior. La bola continúa cayendo, choca en forma completamente elástica con una acera horizontal, y reaparece en la parte baja de la ventana 2.0 s después de haber pasado por allí en su ruta de caída. ¿Cuál es la altura del edificio? (La bola tendría la misma velocidad en un punto yendo hacia arriba que la que tenía yendo hacia abajo después de una colisión completamente elástica.)
75. Un perro ve una maceta de flores subir y luego bajar a través de una ventana de 1.1 m de altura. Si el tiempo total en que la maceta está a la vista es de 0.74 s, halle la altura por sobre el dintel de la ventana a la que se eleva la maceta.

CAPÍTULO 3

VECTORES

Muchas de las leyes de la física implican no sólo relaciones algebraicas entre cantidades, sino también relaciones geométricas. Por ejemplo, imaginemos una peonza que gira rápidamente alrededor de su eje, mientras que el propio eje de rotación gira lentamente con respecto a la vertical. Esta relación geométrica es complicada para representarla por medio de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, si usamos vectores para representar las variables físicas, una sola ecuación es suficiente para explicar el comportamiento. Los vectores permiten esta economía de expresión en numerosas leyes de la física. A veces la forma vectorial de una ley física nos permite ver relaciones o simetrías que de otro modo estarían veladas por una ecuación algebraica engorrosa.

En este capítulo exploraremos alguna de las propiedades y usos de los vectores e introduciremos las operaciones matemáticas en las que intervienen vectores. En el proceso aprenderemos que los símbolos familiares de la aritmética, tales como $+$, $-$, y $\times$, tienen significados diferentes cuando se aplican a los vectores.

3-1 VECTORES Y ESCALARES

Al cambio de posición de una partícula se le llama *desplazamiento*. Si una partícula se mueve de la posición A a la posición B (Fig. 1a), podemos representar su desplazamiento trazando una línea desde A hasta B . La dirección del desplazamiento puede indicarse poniendo una punta de flecha en B para indicar que el desplazamiento fue *desde A hasta B* . La trayectoria de la partícula no necesita ser necesariamente una línea recta de A a B ; la flecha representa sólo el efecto neto del movimiento, no el movimiento real.

En la figura 1b, por ejemplo, hemos trazado una trayectoria real seguida por una partícula que va desde A hasta B . La trayectoria no es la misma que el desplazamiento AB . Si fuésemos a tomar instantáneas de la partícula cuando estaba en A y, más tarde, cuando estaba en alguna posición intermedia P , podríamos obtener el vector AP del desplazamiento, que representa el efecto neto del movimiento durante este intervalo, aun cuando no conociéramos la trayectoria real entre esos puntos. Más aún, un desplazamiento tal como $A'B'$, (Fig. 1a), que sea paralelo a AB , dirigido similarmente, e igual en longitud a AB , representa el mismo *cambio* en la posición que AB . No

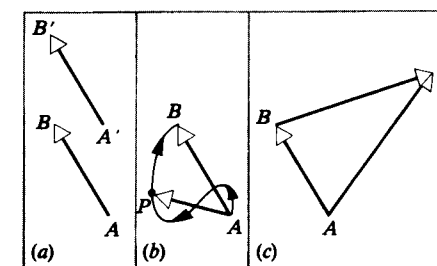


Figura 1 Vectores de desplazamiento. (a) Los vectores AB y $A'B'$ son idénticos, puesto que tienen la misma longitud y apuntan en la misma dirección. (b) La *trayectoria* real de la partícula al moverse de A a B puede ser la curva que se muestra; el *desplazamiento* es el vector AB . En el punto intermedio P , el desplazamiento es el vector AP . (c) Después del desplazamiento AB , la partícula experimenta otro desplazamiento BC . El efecto neto de los dos desplazamientos es el vector AC .

hacemos distinción entre estos dos desplazamientos. Un desplazamiento se caracteriza, por lo tanto, por una *longitud* y una *dirección*.

De manera similar, podemos representar un desplazamiento siguiente desde B hasta C (Fig. 1c). El efecto neto

de los dos desplazamientos es el mismo que un desplazamiento de A a C. Hablamos entonces de AC como la *suma* o *resultante* de los desplazamientos AB y BC. Nótese que esta suma no es una suma algebraica y que un número solo no puede especificarla en forma única.

Las cantidades que se comportan como desplazamientos se llaman *vectores*. (La palabra *vector* significa *portador* en latín. Los biólogos usan el término *vector* para significar un insecto, un animal u otro agente que *porta* una causa de enfermedad de un organismo a otro.) Los vectores, entonces, son cantidades que tienen tanto magnitud como dirección y que siguen ciertas reglas de combinación, que describiremos a continuación. El vector de desplazamiento es un prototipo conveniente. Algunas otras cantidades físicas que se representan por vectores son: fuerza, velocidad, aceleración, campo eléctrico y campo magnético. Muchas de las leyes de la física pueden ser expresadas en forma compacta por el uso de vectores, y las derivaciones que implican estas leyes a menudo se simplifican notablemente cuando lo hacemos.

Las cantidades que pueden ser especificadas completamente por un número y una unidad y que, por lo tanto, tienen sólo magnitud se llaman *escalares*. Algunas cantidades físicas escalares son: masa, longitud, tiempo, densidad, energía y temperatura. Los escalares pueden ser manipulados por las reglas del álgebra ordinaria.

3-2 SUMA DE VECTORES: MÉTODO GRÁFICO

Para representar un vector en un diagrama trazamos una flecha. Elegimos que la longitud de la flecha sea proporcional a la magnitud del vector (esto es, elegimos una escala), y elegimos que la dirección de la flecha sea la dirección del vector, con la punta indicando el sentido de la dirección. Por ejemplo, un desplazamiento de 42 m en una dirección nordeste estaría representada en una escala de 1 cm por 10 m por una flecha de 4.2 cm de longitud, dibujada en un ángulo de 45° sobre una línea que apunte al este con la punta de flecha en el extremo superior derecho (Fig. 2). El vector se representa usualmente en un texto impreso por un símbolo en negritas, tal como **d**. En la escritura manual ponemos una flecha sobre el símbolo para denotar la cantidad vectorial, tal como $\vec{d}$.

Por lo general, nos interesamos sólo en la magnitud (o longitud) del vector y no en su dirección. La magnitud de **d** se escribe a veces como $|\mathbf{d}|$; con mayor frecuencia representamos la magnitud únicamente por el símbolo *d* en itálicas. El símbolo en negritas quiere significar ambas propiedades del vector, magnitud y dirección. En la escritura manual, la magnitud del vector se representa por el símbolo sin la flecha.

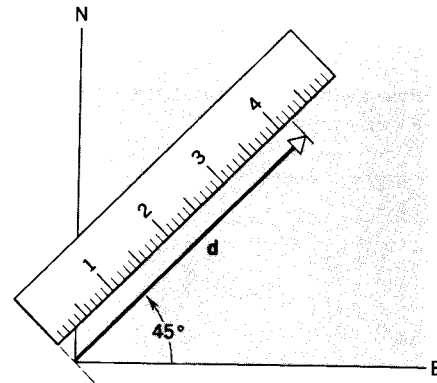


Figura 2 El vector **d** representa un desplazamiento de magnitud 42 m (en una escala en la cual 10 m = 1 cm) en una dirección de 45° al NE.

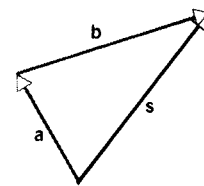


Figura 3 La suma vectorial $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{s}$. Compare con la figura 1c.

Consideremos ahora la figura 3 en la que hemos redibujado y reetiquetado los vectores de la figura 1c. La relación entre estos vectores puede escribirse así:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{s}. \quad (1)$$

Las reglas a seguir al ejecutar esta adición vectorial gráficamente son éstas: (1) En un diagrama dibujado a escala trazar el vector **a** con su dirección propia en el sistema de coordenadas. (2) Dibujar **b** a la misma escala con la cola en la punta de **a**, asegurándose de que **b** tenga su misma dirección propia (por lo general diferente de la dirección de **a**). (3) Dibujar una línea desde la cola de **a** hasta la punta de **b** para construir el vector suma **s**. Si los vectores estuviesen representando desplazamientos, entonces **s** sería un desplazamiento equivalente en longitud y dirección a los desplazamientos sucesivos **a** y **b**. Este procedimiento puede ser generalizado para obtener la suma de cualquier número de vectores.

Puesto que los vectores difieren de los números ordinarios, esperamos reglas diferentes para su manipulación. El símbolo "+" de la ecuación 1 tiene un significado diferente de su significado en aritmética o en álgebra escalar. Nos dice que llevaremos a cabo un juego diferente de operaciones.

Tras una inspección cuidadosa de la figura 4 podemos deducir dos propiedades importantes de la adición de vectores:

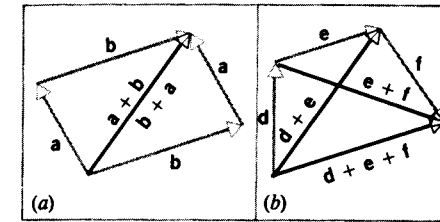


Figura 4 (a) La ley conmutativa para la adición vectorial, la cual establece que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. (b) La ley asociativa, la cual establece que $\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f}$.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{ley conmutativa}) \quad (2)$$

y

$$\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} \quad (\text{ley asociativa}). \quad (3)$$

Estas leyes aseguran que no hay diferencia alguna en el orden o agrupamiento en que sumemos los vectores; la suma es la misma. A este respecto, la adición vectorial y la adición escalar siguen las mismas reglas.

Al inspeccionar la figura 4b vemos cómo se usa el método gráfico para hallar la suma de más de dos vectores, en este caso $\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}$. Cada vector sucesivo es colocado con su cola en la punta del anterior. El vector que representa a la suma se dibuja después desde la cola del primer vector a la punta del último.

La operación de sustracción (resta) puede ser incluida en nuestra álgebra vectorial definiendo el negativo de un vector como otro vector de igual magnitud pero de dirección opuesta. Así,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad (4)$$

como se muestra en la figura 5. Aquí $-\mathbf{b}$ significa un vector con la misma magnitud que **b** pero que apunta en dirección opuesta. Se deduce de la ecuación 4 que $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$,

No olvide que, aunque hemos usado los desplazamientos para ilustrar estas operaciones, las reglas se aplican a *todas* las cantidades vectoriales tales como velocidades y fuerzas.

3-3 COMPONENTES DE VECTORES

Aun cuando hemos definido la adición vectorial con el método gráfico, ello no es muy útil para vectores en tres dimensiones. A menudo es hasta inconveniente para el caso bidimensional. Otra manera de sumar vectores es el método analítico, que implica la resolución de un vector en componentes con respecto a un sistema de coordenadas en particular.

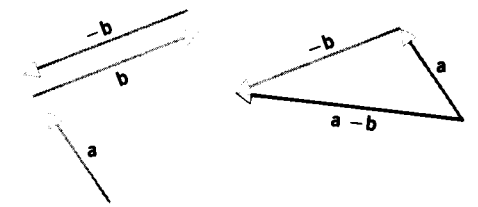


Figura 5 La resta vectorial $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

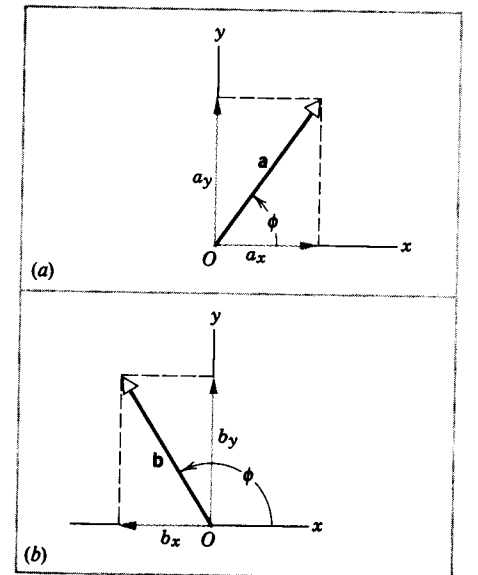


Figura 6 (a) El vector **a** tiene una componente a_x en la dirección *x* y una componente a_y en la dirección *y*. (b) El vector **b** tiene una componente *x* negativa.

La figura 6a muestra un vector **a** cuya cola ha sido situada en el origen de un sistema rectangular de coordenadas. Si dibujamos líneas perpendiculares desde la punta de **a** a los ejes, las cantidades a_x y a_y se llaman *componentes* (cartesianas) del vector **a**. El proceso se llama *resolución de un vector en sus componentes*. El vector **a** está especificado en forma única y completa por estas componentes; dadas a_x y a_y podríamos reconstruir inmediatamente el vector **a**.

Las componentes de un vector pueden ser positivas, negativas, o cero. La figura 6b muestra un vector **b** que tiene a $b_x < 0$ y a $b_y > 0$.

En la figura 6a las componentes a_x y a_y se hallan fácilmente por

$$a_x = a \cos \phi \quad \text{y} \quad a_y = a \sin \phi, \quad (5)$$

donde ϕ es el ángulo que el vector **a** forma con el eje *x* positivo. Como se muestra en la figura 6, los signos algebraicos de las componentes de un vector dependen del cuadrante en que se encuentra el ángulo ϕ . Por ejemplo, cuando está entre 90° y 180°, como en la figura 6b, el vector

siempre tiene una componente x negativa y una componente y positiva. Las componentes de un vector se comportan como cantidades escalares porque, en cualquier sistema de coordenadas en particular, sólo se necesita un número con un signo algebraico para especificarlas.

Una vez que un vector queda resuelto en sus componentes, las componentes mismas pueden utilizarse para especificar al vector. En lugar de los dos números a (magnitud del vector) y ϕ (dirección del vector relativa al eje x), podemos ahora tener los dos números a_x y a_y . Podemos ir y venir entre la descripción de un vector en términos de sus componentes (a_x y a_y) y la descripción equivalente en términos de la magnitud y la dirección (a y ϕ). Para obtener a y ϕ a partir de a_x y a_y , notamos en la figura 6a que

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (6a)$$

y

$$\tan \phi = a_y/a_x. \quad (6b)$$

El cuadrante en que se encuentra ϕ se determina a partir de los signos de a_x y de a_y .

En tres dimensiones el proceso trabaja de manera similar: se dibujan líneas perpendiculares desde la punta de un vector a a los tres ejes de coordenadas x , y , y z . La figura 7 muestra la manera como suele dibujarse para reconocer más fácilmente a las componentes; la componente (a veces llamada *proyección*) de a en el plano xy se dibuja primero, y luego desde su punta podemos hallar las componentes individuales a_x y a_y . Podríamos obtener exactamente las mismas componentes x y y si trabajásemos directamente con el vector a en lugar de hacerlo con su proyección xy , pero el dibujo no sería tan claro. De la geometría de la figura 7, podemos deducir que las componentes del vector a son

$$\begin{aligned} a_x &= a \sin \theta \cos \phi, & a_y &= a \sin \theta \sin \phi, & y \\ a_z &= a \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Cuando se resuelve un vector en sus componentes conviene a veces introducir un vector de longitud unitaria en una dirección determinada. Conviene también dibujar vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas elegidos en particular. En el sistema de coordenadas rectangulares se emplean por lo general los símbolos i , j , y k como vectores unitarios en las direcciones positivas de x , y , y z , respectivamente (véase la Fig. 8). En la notación de escritura manual, los vectores unitarios se usan a menudo con un acento circunflejo o "sombbrero", como en $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$.

Nótese que i , j , y k no necesitan estar ubicados en el origen. Como todos los vectores, pueden ser trasladados a cualquier lugar en el espacio de las coordenadas en tanto

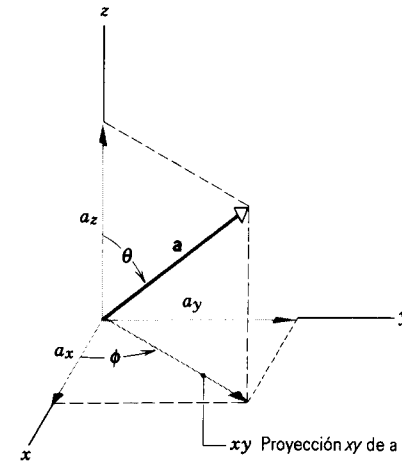


Figura 7 Un vector a en tres dimensiones con componentes a_x , a_y , y a_z . Las componentes x y y se hallan convenientemente dibujando primero la proyección xy de a . El ángulo θ entre a y el eje z se llama *ángulo polar*. El ángulo ϕ en el plano xy entre la proyección de a y el eje x se llama *ángulo azimutal*. El ángulo azimutal tiene el mismo significado aquí que en la figura 6.

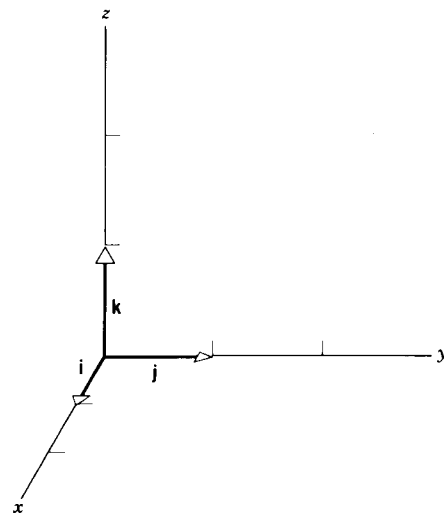


Figura 8 Los vectores unitarios i , j , y k se usan para especificar los ejes x , y , y z , respectivamente. Cada vector carece de dimensión y tiene una longitud de la unidad.

que sus direcciones con respecto a los ejes de coordenadas no sean cambiadas.

En general, un vector a en un sistema de coordenadas tridimensional puede escribirse en términos de sus componentes y los vectores unitarios como

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (8a)$$

o en dos dimensiones como

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}. \quad (8b)$$

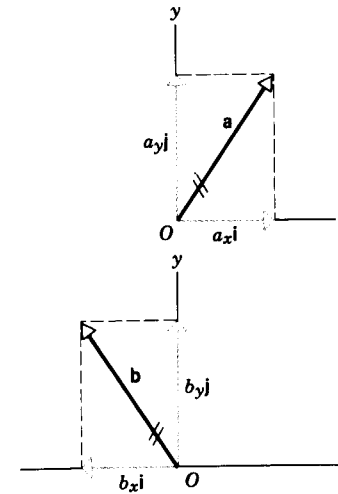


Figura 9 Las componentes vectoriales de a y de b . En cualquier situación física que involucre a vectores, obtenemos el mismo resultado, ya sea que usemos el vector propio, tal como a , o sus dos componentes vectoriales, $a_x \mathbf{i}$ y $a_y \mathbf{j}$. El efecto del vector solo a es equivalente al efecto neto de los dos vectores $a_x \mathbf{i}$ y $a_y \mathbf{j}$. Cuando se haya reemplazado un vector con sus componentes vectoriales, es útil trazar una línea doble a través del vector original como se muestra; esto ayuda a no considerar ya más al vector original.

La relación vectorial de la ecuación 8b es equivalente a las relaciones escalares de la ecuación 6. Cada ecuación relaciona el vector (a , o a y ϕ) con sus componentes (a_x y a_y). A veces llamamos a cantidades tales como $a_x \mathbf{i}$ y $a_y \mathbf{j}$ de la ecuación 8b las *componentes vectoriales* de a . La figura 9 muestra los vectores a y b trazados en términos de sus componentes vectoriales. Muchos problemas físicos en que intervienen vectores pueden ser simplificados reemplazando un vector por sus componentes vectoriales. Esto es, la acción de una cantidad representada como un vector puede ser reemplazada por las acciones de sus componentes vectoriales. Cuando sea necesario, nos referiremos de manera explícita a las *componentes vectoriales*, mientras que la palabra *componente* en sí continúa refiriéndose a las cantidades escalares a_x y a_y .

Otros sistemas de coordenadas (Opcional)

Para el análisis de ciertas situaciones físicas pueden ser apropiadas muchas otras variedades de sistemas de coordenadas. Por ejemplo, el sistema de coordenadas bidimensional xy puede cambiarse de dos maneras: (1) moviendo el origen a otra ubicación en el plano xy , lo cual se llama *traslación* del sistema de coordenadas, o (2) pivotando los ejes xy con respecto al origen fijado, lo cual es una *rotación* del sistema de coordenadas. En ambas operaciones mantenemos al vector fijo y movemos los ejes de coordenadas. La figura 10 muestra el efecto de estos dos cambios. En el caso mostrado en la figura 10a, las componentes no han cambiado, pero en el caso mostrado en la figura 10b las componentes sí cambian.

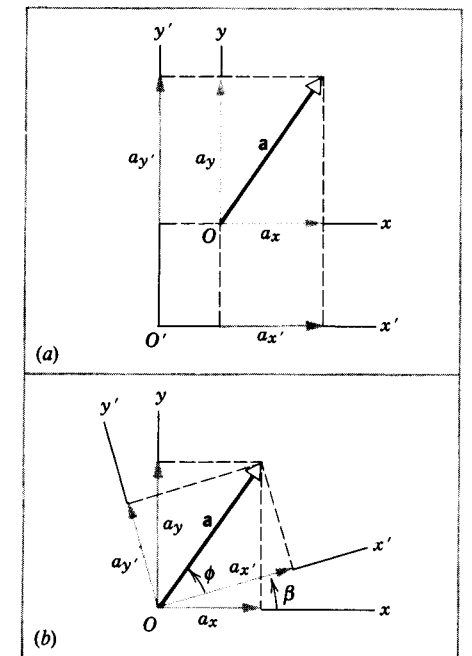


Figura 10 (a) El origen O del sistema de coordenadas de la Fig. 6a se ha movido o *trasladado* a la nueva posición O' . Las componentes x y y de a son idénticas a las componentes x' y y' . (b) Los ejes x y y han sido girados en el ángulo β . Las componentes x' y y' son diferentes a las componentes x y y (nótese que la componente y' es ahora más pequeña que la componente x' , mientras que en la figura 6a la componente y era más grande que la componente x), pero *el vector a no ha cambiado*. ¿En qué ángulo tendrían que girarse los ejes de coordenadas para hacer que la componente y' sea cero?

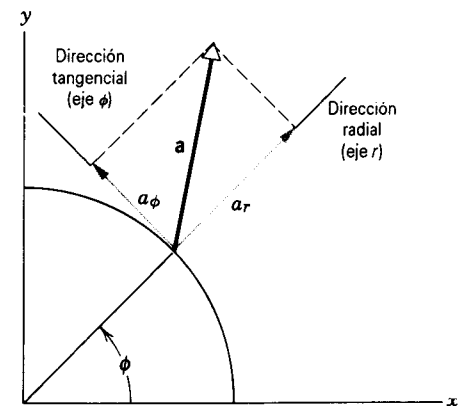


Figura 11 El vector a se resuelve en sus componentes radial y tangencial. Estas componentes tendrán aplicaciones importantes cuando hablemos del movimiento circular en los capítulos 4 y 11.

Cuando la situación física que estemos analizando tenga ciertas simetrías, puede ser una ventaja elegir un sistema de coordenadas diferente para resolver un vector en sus componentes. Por ejemplo, podríamos escoger las direcciones radial y

tangencial de las coordenadas polares planas, mostradas en la figura 11. En este caso, hallamos las componentes sobre los ejes de coordenadas justamente como lo hicimos en el sistema xyz ordinario: dibujamos una perpendicular desde la punta del vector a cada eje de coordenadas.

Las extensiones tridimensionales de la figura 11 (coordenadas polares esféricas o cilíndricas) son, en muchos casos importantes, muy superiores a los sistemas de coordenadas cartesianas para el análisis de problemas físicos. Por ejemplo, la fuerza de gravitación ejercida por la Tierra sobre objetos distantes tiene la simetría de una esfera, y entonces sus propiedades se describen más sencillamente en coordenadas polares esféricas. La fuerza magnética que ejerce un alambre recto y largo conductor de corriente tiene la simetría de un cilindro y queda, por lo tanto, descrito de manera mucho más sencilla en coordenadas polares cilíndricas. ■

3-4 SUMA DE VECTORES: MÉTODO DE LAS COMPONENTES

Ahora que hemos mostrado cómo resolver vectores en sus componentes, podemos considerar la suma de vectores por un método analítico.

Sea s la suma de los vectores a y b , o

$$s = a + b. \quad (9)$$

Si dos vectores, tales como s y $a + b$ han de ser iguales, deben tener la misma magnitud y apuntar en la misma dirección. Esto solamente puede suceder si sus componentes correspondientes son iguales. Recalcamos esta importante conclusión:

Dos vectores son iguales entre sí solamente si sus componentes correspondientes son iguales.

Para los vectores de la ecuación 9, podemos escribir:

$$s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} \\ = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j}. \quad (10)$$

Igualando las componentes x en ambos lados de la ecuación 10 nos da:

$$s_x = a_x + b_x, \quad (11a)$$

e igualando las componentes y nos da:

$$s_y = a_y + b_y. \quad (11b)$$

Estas dos ecuaciones algebraicas, operadas juntas, son equivalentes a la relación del vector solo de la ecuación 9.

En lugar de especificar las componentes de s , podemos dar su longitud y dirección:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} \quad (12a)$$

y

$$\tan \phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x}. \quad (12b)$$

He aquí la regla para sumar vectores por este método. (1) Resolver cada vector en sus componentes, manteniendo el curso del signo algebraico de cada componente. (2) Sumar las componentes de cada eje de coordenadas, tomando en cuenta el signo algebraico. (3) Las sumas así obtenidas son las componentes del vector suma. Una vez que conozcamos las componentes del vector suma, podemos reconstruir fácilmente a ese vector en el espacio.

La ventaja del método de separar a los vectores en sus componentes, en lugar de sumarlos directamente haciendo uso de relaciones trigonométricas apropiadas, es que siempre tratamos con ángulos rectos y así simplificamos los cálculos.

Al sumar vectores por el método de las componentes, la elección de los ejes de coordenadas determinan qué tan sencillo será el proceso. A veces, las componentes de los vectores con respecto a un juego de ejes en particular son conocidas desde el comienzo, de modo que la elección de los ejes es obvia. Otras veces una elección juiciosa de los ejes puede simplificar en forma considerable el trabajo de resolución de los vectores en sus componentes. Por ejemplo, los ejes pueden ser orientados de modo que cuando menos uno de los vectores sea paralelo a un eje; las componentes de ese vector a lo largo de los otros ejes serán entonces cero.

Problema muestra 1 Un aeroplano viaja 209 km en línea recta formando un ángulo de 22.5° al NE. ¿A qué distancia al norte y a qué distancia al este viajó el aeroplano desde el punto de partida?

Solución Elegimos que la dirección x positiva sea este y que la dirección y positiva sea norte. Enseguida, trazamos un vector de desplazamiento (Fig. 12) desde el origen (punto de partida), formando un ángulo de 22.5° con el eje y (norte) inclinado a lo largo de la dirección x positiva (este). La longitud del vector representa una magnitud de 209 km. Si llamamos a este vector d , entonces d_x da la distancia viajada hacia el este del punto de partida y d_y da la distancia viajada hacia el norte del punto de partida. Tendremos que

$$\phi = 90.0^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ,$$

de modo que (véanse las ecuaciones 5)

$$d_x = d \cos \phi = (209 \text{ km}) (\cos 67.5^\circ) = 80.0 \text{ km},$$

y

$$d_y = d \sin \phi = (209 \text{ km}) (\sin 67.5^\circ) = 193 \text{ km}.$$

En este problema hemos usado componentes cartesianas, aun cuando la superficie de la Tierra es curva y, por lo tanto, no cartesiana. Por ejemplo, un aeroplano que parta del Ecuador y

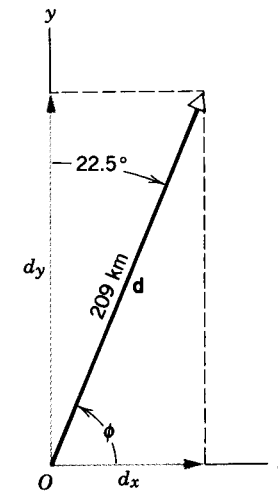


Figura 12 Problema muestra 1.

vuele hacia el noreste eventualmente irá al norte de su punto de partida, lo cual nunca ocurre en un sistema de coordenadas planas. De igual forma, dos aeroplanos que partan de diferentes puntos del Ecuador y vuelen hacia el norte a la misma velocidad a lo largo de trayectorias paralelas eventualmente chocarán en el Polo Norte. Esto también sería imposible en un sistema de coordenadas planas. Si restringimos nuestros cálculos a distancias que sean pequeñas con respecto al radio de la Tierra (6400 km), podemos usar con seguridad el sistema de coordenadas cartesianas para analizar los desplazamientos sobre la superficie de la Tierra.

Problema muestra 2 Un automóvil viaja hacia el este en una carretera a nivel durante 32 km. Después da vuelta hacia el norte en una intersección y viaja 47 km antes de detenerse. Hallar el desplazamiento resultante del automóvil.

Solución Elegimos un sistema de coordenadas fijo con respecto a la Tierra, con la dirección x positiva apuntando hacia el este y la dirección y positiva apuntando hacia el norte. Los dos desplazamientos sucesivos, a y b , se trazan como se muestra en la figura 13. El desplazamiento resultante s se obtiene de $s = a + b$. Puesto que b no tiene componente x y a no tiene componente y , obtenemos (véanse las ecuaciones 11)

$$s_x = a_x + b_x = 32 \text{ km} + 0 = 32 \text{ km},$$

$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47 \text{ km} = 47 \text{ km}.$$

La magnitud y la dirección de s son, entonces (véanse las ecuaciones 12)

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(32 \text{ km})^2 + (47 \text{ km})^2} = 57 \text{ km},$$

$$\tan \phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{47 \text{ km}}{32 \text{ km}} = 1.47, \quad \phi = \tan^{-1}(1.47) = 56^\circ.$$

El vector de desplazamiento resultante s tiene una magnitud de 57 km y forma un ángulo de 56° al noreste.

Problema muestra 3 Tres vectores coplanarios están expresados con respecto a un cierto sistema de coordenadas rectangulares como sigue:

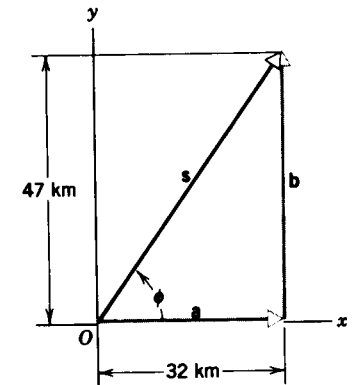


Figura 13 Problema muestra 2.

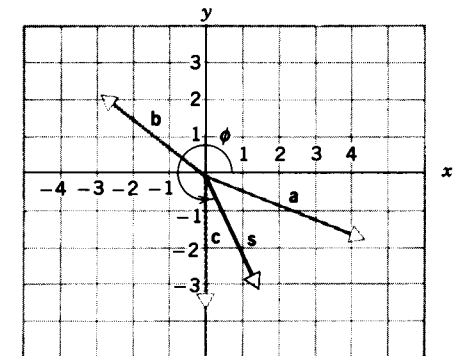


Figura 14 Problema muestra 3.

$$a = 4.3\mathbf{i} - 1.7\mathbf{j},$$

$$b = -2.9\mathbf{i} + 2.2\mathbf{j},$$

y

$$c = -3.6\mathbf{j},$$

donde las componentes están dadas en unidades arbitrarias. Halle el vector s que sea la suma de estos vectores.

Solución Generalizando las ecuaciones 11 al caso de tres vectores, tenemos que

$$s_x = a_x + b_x + c_x = 4.3 - 2.9 + 0 = 1.4,$$

y

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -1.7 + 2.2 - 3.6 = -3.1.$$

Entonces

$$s = s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} = 1.4\mathbf{i} - 3.1\mathbf{j}.$$

La figura 14 muestra los cuatro vectores. A partir de las ecuaciones 6 podemos calcular que la magnitud de s es 3.4 y que el ángulo ϕ que s forma con el eje x positivo, medido en sentido antihorario de ese eje, es

$$\phi = \tan^{-1}(-3.1/1.4) = 294^\circ.$$

La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan ángulos entre $+90^\circ$ y -90° para la tangente del arco. En este caso, -66° (que nos da la calculadora) es equivalente a 294° . Sin embargo, obtendríamos el mismo ángulo si pidiéramos $\tan^{-1}(3.1/-1.4)$, lo cual nos daría un ángulo en el segundo cuadrante (superior izquierdo). Dibujando un diagrama similar a la figura 14 podemos evitar graves equivocaciones y, de ser necesario, puede convertirse el valor de la calculadora en un resultado en el cuadrante correcto usando la identidad $\tan(-\phi) = \tan(180^\circ - \phi)$.

3-5 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Cuando sumamos cantidades escalares, los sumandos deben tener las mismas dimensiones, y la suma tendrá igualmente las mismas dimensiones. La misma regla se aplica a la suma de cantidades vectoriales. Por otra parte, podemos multiplicar cantidades escalares de dimensiones diferentes y obtener un producto de dimensiones posiblemente diferentes de cualquiera de las cantidades que han sido multiplicadas, por ejemplo distancia = velocidad $\times$ tiempo.

Como con los escalares, los vectores de diferentes clases pueden multiplicarse por otro para generar cantidades de dimensiones físicas nuevas. A causa de que los vectores tienen tanto dirección como magnitud, el vector de multiplicación no puede seguir exactamente las mismas reglas que las reglas algebraicas de la multiplicación escalar. Debemos establecer nuevas reglas de multiplicación para los vectores.

Consideramos útil definir tres clases de operaciones de multiplicación con vectores: (1) multiplicación de un vector por un escalar, (2) multiplicación de dos vectores de modo tal que den por resultado un escalar, y (3) multiplicación de dos vectores de modo tal que den por resultado otro vector. Existen aún otras posibilidades que no consideraremos aquí.

1. Multiplicación de un vector por un escalar. La multiplicación de un vector por un escalar tiene un significado sencillo: el producto de un escalar c y un vector $\mathbf{a}$, escrito $c\mathbf{a}$, se define que es un nuevo vector cuya magnitud es c multiplicado por la magnitud de $\mathbf{a}$. El nuevo vector tiene la misma dirección que $\mathbf{a}$ si c es positivo y la dirección opuesta si c es negativo, como se muestra en la figura 15. Para dividir un vector por un escalar simplemente multiplicamos el vector por el recíproco del escalar. A menudo el escalar no es un número puro sino una cantidad física con dimensiones y unidades.

2. Multiplicación de dos vectores para dar por resultado un escalar. El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, escrito como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, se define como

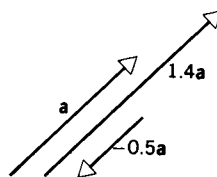


Figura 15 La multiplicación de un vector $\mathbf{a}$ por un escalar c da un vector $c\mathbf{a}$ cuya magnitud es c veces la magnitud de $\mathbf{a}$. El vector $c\mathbf{a}$ tendrá la misma dirección de $\mathbf{a}$ si c es positivo y la dirección opuesta si c es negativo. Los ejemplos ilustrados son para $c = +1.4$ y $c = -0.5$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi, \quad (13)$$

donde a es la magnitud del vector $\mathbf{a}$, b es la magnitud del vector $\mathbf{b}$, y $\cos \phi$ es el coseno del ángulo ϕ entre los dos vectores (véase la Fig. 16). A causa de la notación, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se llama también el producto punto de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y se le dice "a punto b". El producto punto es independiente de la elección de los ejes de coordenadas.

Puesto que a y b son escalares y $\cos \phi$ es un número puro, el producto escalar de dos vectores es un escalar. El producto escalar de dos vectores puede ser visto como el producto de la magnitud de un vector y la componente del otro vector en la dirección del primero, como en la figura 16. El producto escalar puede expresarse en forma correspondiente ya sea como $a(b \cos \phi)$ o como $b(a \cos \phi)$.

Podríamos haber definido que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es cualquier operación, por ejemplo, $a^{1/3} b^{1/4} \tan(\phi/2)$, pero resultaría que esto no tiene uso para nosotros en física. Con nuestra definición del producto escalar, un número de cantidades físicas importantes puede ser descrito como el producto escalar de dos vectores. Algunos de ellos son el trabajo mecánico, la energía potencial de gravitación, el potencial eléctrico, la potencia eléctrica y la densidad de la energía electromagnética. Más adelante, definiremos estas cantidades físicas en términos de los productos escalares de dos vectores.

Si dos vectores son perpendiculares, su producto punto se desvanece. Usando la definición del producto punto, podemos derivar las siguientes relaciones para los vectores unitarios cartesianos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Con estas relaciones, podemos hallar (véase el problema 35) una forma alternativa para el producto punto de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en un sistema tridimensional de coordenadas xyz en términos de sus componentes:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (15)$$

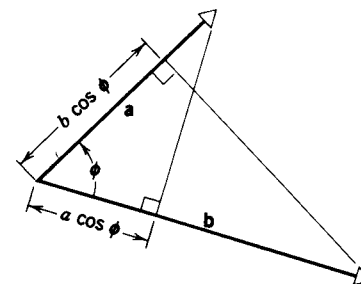


Figura 16 El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} (= ab \cos \phi)$ es el producto de la magnitud de un vector (por ejemplo, a) y la componente del otro vector en la dirección del primero ($b \cos \phi$).

3. Multiplicación de dos vectores para dar como resultado otro vector. El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se escribe como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y es otro vector $\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. La magnitud de $\mathbf{c}$ se define como

$$c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \phi, \quad (16)$$

donde ϕ es el ángulo (más pequeño) entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Existen dos ángulos diferentes entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$: ϕ como en la figura 16 y $2\pi - \phi$. En la multiplicación vectorial siempre elegimos el más pequeño de estos ángulos. En la ecuación 13 para el producto escalar, no importa cuál escojamos, porque $\cos(2\pi - \phi) = \cos \phi$. Sin embargo, sí importa en la ecuación 16, porque $\sin(2\pi - \phi) = -\sin \phi$.

A causa de la notación, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se llama siempre el producto cruz de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y nos referimos a él como dice "a cruz b".

La dirección de $\mathbf{c}$, el producto vectorial de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, se define como perpendicular al plano formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Para especificar el sentido del vector $\mathbf{c}$ nos referiremos a la figura 17. Dibujamos los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ intersecándose en sus colas, imaginando un eje perpendicular al plano de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ a través de su origen. Doblamos hacia adentro ahora los dedos de la mano derecha alrededor de este eje y empujamos al vector $\mathbf{a}$ hacia el vector $\mathbf{b}$ a través del ángulo más pequeño entre ellos con las puntas de los dedos, manteniendo el pulgar extendido; la dirección del pulgar da entonces la dirección del vector producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Este procedimiento describe una convención. Los dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman un plano, y existen dos direcciones (opuestas) para un vector $\mathbf{c}$ que sea perpendicular al plano. Nuestra elección se basa en la convención de la mano derecha. (Una convención de la mano izquierda nos daría la dirección opuesta para el vector producto.)

Si ϕ es 90° , entonces $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, y $\mathbf{c} (= \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ están todos en ángulos rectos entre sí y dan las direcciones de un sistema tridimensional de coordenadas de mano derecha.

Nótese que $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ no es el mismo vector que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, de modo que el orden de los factores es importante en un producto vectorial. Esto no sucede así en el caso de los

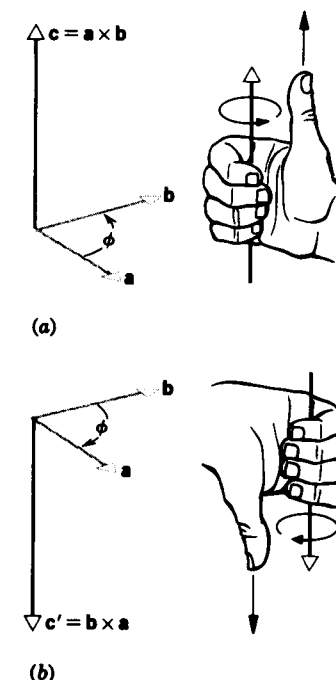


Figura 17 La regla de la mano derecha para los productos vectoriales. (a) Girar el vector $\mathbf{a}$ hacia el vector $\mathbf{b}$ con los dedos de la mano derecha. El pulgar muestra la dirección de $\mathbf{c}$. (b) Invertiendo el procedimiento se demuestra que $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

escalares porque el orden de los factores en álgebra o en aritmética no afecta al producto resultante. En realidad, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, como se muestra en la figura 17. Esto puede deducirse del hecho de que la magnitud $ab \sin \phi$ es igual a la magnitud $ba \sin \phi$, pero la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es opuesta a la de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. El producto cruz, como hemos ya definido, es independiente de la elección de los ejes de coordenadas.

Los tres vectores cartesianos unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$ de un sistema de coordenadas de mano derecha están relacionados por el producto cruz $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. (Esto, de hecho, define lo que queremos significar por sistema de mano derecha. A menos que se indique lo contrario, usaremos siempre sistemas de coordenadas de mano derecha.) Manteniendo a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$ en el mismo orden cíclico podemos también escribir $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$. Si cambiamos el orden entra un signo menos; por ejemplo, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. El producto cruz de dos vectores unitarios iguales cualesquiera se desvanece ($\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$), como lo hace el producto cruz de cualquier vector consigo mismo ($\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$). Con estas relaciones para los productos cruz de vectores unitarios iguales o diferentes, podemos demostrar que (véase el problema 36)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}. \quad (17)$$

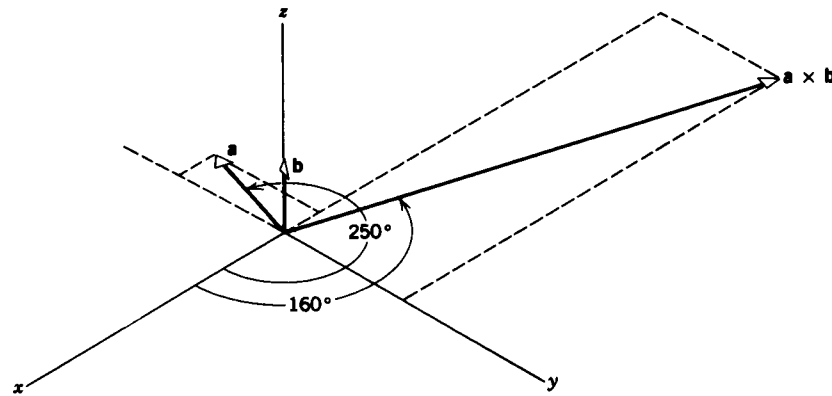


Figura 18 Problema muestra 4.

La razón para definir el producto vectorial de esta manera es que ha demostrado ser muy útil en física. A menudo encontramos cantidades físicas que son vectores cuyo producto, definido como antes, es una cantidad vectorial con un significado físico importante. Algunos ejemplos de cantidades físicas que son productos vectoriales son el momento de torsión o torca, el momento angular, la fuerza sobre una carga que se mueve en un campo magnético, y el flujo de energía electromagnética. Tales cantidades se estudiarán más adelante, y señalaremos su conexión con el vector producto de dos vectores.

Productos generalizados de vectores (opcional)

El producto escalar es el producto más sencillo de dos vectores. El orden de la multiplicación no altera el producto. El producto vector es el siguiente caso más sencillo. Aquí el orden de multiplicación sí altera el producto, pero sólo por un factor de menos uno, lo cual implica una dirección inversa. Otros productos de vectores son útiles pero más complicados. Por ejemplo, un *tensor* puede ser generado multiplicando cada una de las tres componentes de un vector por las tres componentes de otro vector. Por lo tanto, el tensor (del segundo rango) tiene nueve números asociados; el vector, tres, y el escalar sólo uno. Algunas cantidades físicas que pueden ser representadas por tensores son el esfuerzo mecánico y eléctrico, la inercia de rotación y la deformación. Existen cantidades físicas todavía más complejas. En este libro, sin embargo, nos ocuparemos solamente de escalares y vectores. ■

Problema muestra 4 Cierta vector $\mathbf{a}$ en el plano xy está dirigido 250° en el sentido antihorario del eje positivo x y tiene una magnitud de 7.4 unidades. El vector $\mathbf{b}$ tiene una magnitud de 5.0 unidades y su dirección es paralela al eje z . Calcule (a) el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y (b) el producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución (a) A causa de que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares entre sí, el ángulo ϕ entre ellos es 90° y $\cos \phi = \cos 90^\circ = 0$. Por lo tanto, según la ecuación 13, el producto escalar es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = ab \cos 90^\circ = (7.4)(5.0)(0) = 0,$$

que coincide con el hecho de que ningún vector tiene una componente en la dirección del otro.

(b) La magnitud del vector producto es, según la ecuación 16,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \phi = (7.4)(5.0) \sin 90^\circ = 37.$$

La *dirección* del vector producto es perpendicular al plano formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Por lo tanto, como se muestra en la figura 18, se halla en el plano xy (perpendicular a $\mathbf{b}$) a un ángulo de $250^\circ - 90^\circ = 160^\circ$ del eje x positivo (perpendicular a $\mathbf{a}$ de acuerdo con la regla de la mano derecha).

Podemos hallar las componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ usando la ecuación 17. Primero necesitamos las componentes de $\mathbf{a}$ y de $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} a_x &= 7.4 \cos 250^\circ = -2.5, & b_x &= 0, \\ a_y &= 7.4 \sin 250^\circ = -7.0, & b_y &= 0, \\ a_z &= 0, & b_z &= 5.0. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [(-7.0)(5.0) - (0)(0)]\mathbf{i} + [(0)(0) - (-2.5)(5.0)]\mathbf{j} \\ &\quad + [(-2.5)(0) - (-7.0)(0)]\mathbf{k} \\ &= -35\mathbf{i} + 13\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Lo que corresponde a la magnitud y la dirección mostradas en la figura 18.

3-6 LAS LEYES VECTORIALES EN LA FÍSICA* (Opcional)

Refiriéndonos a la figura 10b, podemos demostrar (véase problema 51) que las componentes del vector de desplazamiento $\mathbf{a}$ del sistema de coordenadas en rotación ($x'y'$) están relacionadas con las del sistema original (xy) según

$$a_{x'} = a_x \cos \beta + a_y \sin \beta \quad (18a)$$

$$a_{y'} = -a_x \sin \beta + a_y \cos \beta, \quad (18b)$$

donde β es el ángulo según el cual han sido rotados los ejes de coordenadas.

Las ecuaciones 18 son ejemplos de ecuaciones de *transformación*, que relacionan las componentes del vector de despla-

* El material de esta sección puede omitirse sin pérdida de la continuidad.

zamiento en un sistema de coordenadas con sus componentes en cualquier sistema de rotación. Podemos usar estas ecuaciones para formular una definición más general y rigurosa del vector, al cual hasta ahora hemos definido como una cantidad física que tiene tanto magnitud como dirección y que obedece a ciertas reglas de combinación. Podemos ahora sustituir aquella definición por otra más específica:

En toda cantidad física (velocidad o fuerza, por ejemplo) que vaya a ser representada por un vector, las componentes de esa cantidad deben transformarse bajo rotación según las reglas dadas en las ecuaciones 18.

Aunque las ecuaciones 18 son válidas para vectores en el espacio bidimensional, pueden ser generalizadas a tres dimensiones. El caso bidimensional, sin embargo, ilustra todos los conceptos esenciales.

Como se indicó en la figura 10, un vector no cambia, o es *invariante*, cuando los ejes de coordenadas son trasladados o rotados. Ciertas cantidades físicas tienen esta misma propiedad; en el caso de la velocidad, por ejemplo, mediríamos el mismo valor para la velocidad de un automóvil que pasa delante de nosotros que lo haría el vecino que vive en la casa que está al otro lado de la calle (¡siempre y cuando ambas casas estén en reposo en relación una con la otra!). Las cantidades que tienen estas propiedades y que obedecen a las leyes de la aritmética vectorial dadas en este capítulo, se representan como vectores. Entre estas cantidades están la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu, el momento angular, y los campos eléctrico y magnético. Las ecuaciones que relacionan estas cantidades son ecuaciones vectoriales; ejemplos de ecuaciones vectoriales son $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = s$ (un escalar), $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 6\mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, etc. Por otra parte, muchas cantidades físicas están bien descritas por escalares y ecuaciones escalares: temperatura, presión, masa, energía, y tiempo. Una de las características de las ecuaciones vectoriales es que no sólo indican la relación matemática entre cantidades físicas sino también la relación geométrica. Consideremos algunos ejemplos de ecuaciones que desarrollaremos y estudiaremos ampliamente más adelante en este texto; aquí sólo presentamos la ecuaciones como ejemplos de las formas básicas.

Comencemos con la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (véase el capítulo 5), que da la fuerza $\mathbf{F}$ que debe actuar sobre una partícula de masa m para dotarla de una aceleración $\mathbf{a}$. En el lado derecho tenemos el escalar masa multiplicado por el vector aceleración, y en el lado izquierdo tenemos el vector fuerza. La ecuación parece sencilla, pero es rica en contenido. Llevando a cabo la multiplicación e igualando las componentes, descubrimos en realidad *tres* ecuaciones independientes: $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, y $F_z = ma_z$. Cada una de estas ecuaciones puede ser resuelta por separado al estudiar cómo responde la partícula a la fuerza. Así, la componente y de la fuerza, por ejemplo, no tiene absolutamente ningún efecto sobre las componentes x o z de la aceleración. En forma equivalente, podríamos decir que la dirección de la aceleración de un sistema está determinada por la dirección de la fuerza que actúa sobre él (porque al multiplicar un vector por un escalar positivo da un vector en la misma dirección). Usaremos este hecho en el próximo capítulo cuando analicemos el movimiento bidimensional de proyectiles que se mueven bajo la influencia de la gravedad.

Las leyes que involucran a productos escalares surgen en varios contextos diferentes. Nuestro primer ejemplo viene de la definición del trabajo mecánico W , un escalar, que es efectuado por una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un sistema produciendo un desplazamiento $\mathbf{d}$: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \phi$ (véase el capítulo 7). En este caso, la fuerza no necesita ser precisamente paralela al

desplazamiento; imaginemos, por ejemplo, que estamos jalando un trineo a lo largo del terreno con un cable que pasa por nuestro hombro. El desplazamiento sería horizontal, pero la fuerza (que se ejerce a lo largo del cable) tendrá componentes tanto horizontal como vertical. Nótese que de acuerdo con las relaciones geométricas ilustradas en la figura 16, sólo la componente de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{d}$ (que es $F \cos \phi$) contribuirá al trabajo efectuado realmente. Una vez más, la ecuación del vector conlleva información acerca de una relación geométrica.

Un ejemplo de una ley física que involucra a un producto vectorial puede consistir en la ecuación $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (véase el capítulo 34), la cual da la fuerza $\mathbf{F}$ experimentada por una carga eléctrica q al moverse con velocidad $\mathbf{v}$ a través de un campo magnético $\mathbf{B}$. La naturaleza geométrica de la fuerza, determinada por la ecuación vectorial, es responsable de que las trayectorias de las partículas pasen a ser órbitas circulares, como en los grandes aceleradores de partículas, como los ciclotrones. Nótese que la fuerza está siempre en ángulo recto tanto con la velocidad como con la dirección del campo magnético. Sin la ecuación vectorial tendríamos dificultad para entender la base de este comportamiento.

Las leyes físicas que están representadas por ecuaciones vectoriales son universales e independientes de cualquier elección particular del sistema de coordenadas. Específicamente, si fuésemos a examinar el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético a partir de dos sistemas de coordenadas, uno de los cuales estuviese rotado con respecto al otro, hallaríamos ciertamente que los vectores $\mathbf{F}$ (fuerza), $\mathbf{v}$ (velocidad), y $\mathbf{B}$ (campo magnético) tienen componentes diferentes en el sistema rotado (como en la Fig. 10b), pero los observadores en ambos sistemas estarían de acuerdo en la forma de la ley física. Esto es, en el sistema rotado los vectores transformados deben satisfacer $\mathbf{F}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$.

Esta propiedad de transformación es una de las maneras de comportamiento inteligente de la naturaleza; de esas que solemos dar por hecho, porque pensamos que la naturaleza *debe* comportarse así. Con la excepción de los efectos puramente locales, por ejemplo: la fuerza eléctrica entre dos electrones separados por cierta distancia *no debería* depender de si la separación se midió de norte a sur o de este a oeste. No es demasiado difícil imaginar un universo que no se comporte tan bien; la longitud de un vector, por ejemplo, podría cambiar cuando lo trasladamos o lo hacemos rotar. Los físicos y los matemáticos han especulado sobre por qué nuestro universo tiene estas simetrías particulares, tales como la traslación y la rotación, y han aprendido que existen relaciones fascinantes entre las simetrías de la naturaleza y ciertas cantidades que se *conservan* (esto es, su magnitud total no cambia) en los procesos físicos. Por ejemplo, la invariancia de las leyes físicas bajo la simetría de la *traslación en el tiempo* (esto es, si una ley sirve para los lunes también sirve para los martes) conduce directamente a la ley de la conservación de la energía.

Simetría de reflexión, vectores polares, y vectores axiales

Existe otra clase de transformación que es bastante diferente de la traslación y de la rotación. Esta transformación implica invertir el sistema de coordenadas, esto es, $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, y $z \rightarrow -z$. En efecto, todo el sistema se refleja a través del origen.

Superficialmente, podríamos esperar que, para esta transformación, todo lo que tendríamos que hacer en nuestras ecuaciones es reemplazar cada componente de un vector por su negativo. (Los escalares no se ven afectados por esta inversión.)

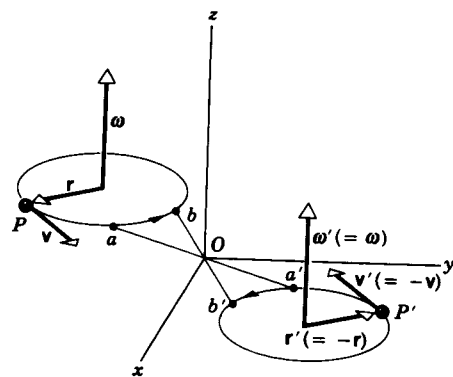


Figura 19 Una partícula P moviéndose en círculo es representada por el vector de la velocidad angular ω . Si todas las coordenadas se reflejan respecto al origen O , la partícula "reflejada" P' gira en un círculo y está representada por el vector de la velocidad angular ω' .

Después de todo, si invertimos el eje x sin cambiar el vector $\mathbf{a}$, entonces, claramente $a_x \rightarrow -a_x$. Así, en lugar de dibujar un sistema de coordenadas invertido, lo que necesitamos hacer es trazar el vector $-\mathbf{a}$ en el sistema de coordenadas original. Estas imposiciones son del todo correctas para una clase grande de cantidades físicas que representamos con vectores: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu lineal, el campo eléctrico. A tales vectores "bien comportados" se les da el nombre genérico de **vectores polares**.

Otra clase de vectores no sigue este tipo de comportamiento bajo la inversión. Por ejemplo, como se ilustra en la figura 19, a menudo es útil representar a una partícula que se mueve en círculo por un vector ω de **velocidad angular**. La magnitud de ω dice en efecto lo rápido que está girando la partícula, y la dirección de ω es perpendicular al plano del círculo determinado por la regla de la mano derecha. (Si doblamos hacia adentro los dedos de la mano derecha en dirección del movimiento de la partícula, el pulgar extendido apunta en la dirección de ω .)

Consideremos ahora la situación cuando la órbita de la partícula se invierte o se refleja a través del origen, como en la figura 19. El vector $\mathbf{r}$ que ubica a la partícula P en relación con el centro del círculo se transforma a $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, y la velocidad se convierte en $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Cuando la partícula original se mueve de a a b , la partícula reflejada se mueve de a' a b' . El sentido o dirección de la rotación (ya sea en sentido de las manecillas del reloj o en sentido antihorario) no cambia, y así $\omega' = \omega$. Entonces, a diferencia de los vectores polares $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$, la velocidad angular **no cambia** de signo cuando las coordenadas se han invertido. A tal vector se le llama **axial** o **seudovector**; la torca y el campo magnético son otros ejemplos de éste.

Los vectores $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, y ω se relacionan por el producto cruz $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, tema que estudiaremos cuando consideremos el movimiento de rotación en el capítulo 11. Si los tres vectores cambian de signo en la inversión, entonces las relaciones entre los vectores reflejados serían $-\mathbf{v} = (-\omega) \times (-\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}$. Esto es una contradicción, ya que $\omega \times \mathbf{r}$ no puede ser $-\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ a la vez (a no ser que $\mathbf{v}$ sea cero, lo cual no es el caso aquí). Así, la transformación $\omega' = \omega$ es absolutamente necesaria, con objeto de que la relación física $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ tenga la misma forma $\mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{r}'$ en el sistema reflejado. Esto es lo que significa la invariancia de una ley física frente a una cierta transformación del sistema de coordenadas. Esto es, si escribimos una ecuación para

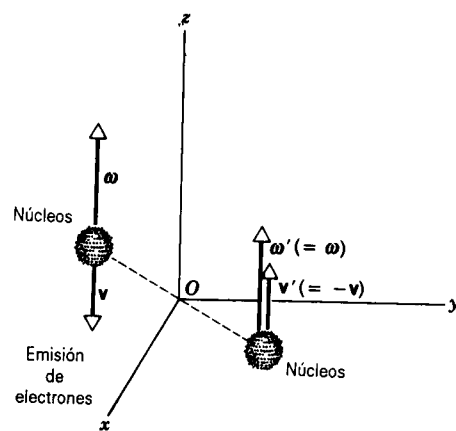


Figura 20 Un grupo de núcleos girando, representado por un vector de velocidad angular ω , emite electrones preferentemente en dirección opuesta a ω . En la versión reflejada del experimento, los electrones se emitirán paralelos a ω' . El experimento y su imagen reflejada se ven bastante diferentes entre sí, mostrando que la simetría de la reflexión se viola por estas desintegraciones.

una ley física en un sistema de coordenadas, transformamos cada vector correspondiente a las coordenadas transformadas, y sustituimos los vectores transformados en la ley física, el resultado sería una ecuación de forma idéntica a la original.

Hasta alrededor de 1956, se creía que todas las leyes físicas no sufrían cambios por inversiones como la de la figura 19 (ni tampoco por rotaciones o por traslaciones). Sin embargo, en 1956 se descubrió que la simetría de la inversión se violaba en cierto tipo de desintegraciones radiactivas llamadas desintegraciones beta, en las cuales son emitidos electrones por el núcleo atómico. Los núcleos giran en sus ejes como pequeños trompos (o peonzas), y es posible asignar a cada núcleo un vector como ω que represente su rotación. En el experimento de desintegración beta, se estudió la dirección de la emisión de electrones con relación a la dirección de ω (Fig. 20). Si se emitían números iguales de electrones paralelos a ω y antiparalelos a ω , entonces el experimento de reflexión se vería exactamente como el original y la simetría de la inversión sería válida. Se descubrió que casi todos los electrones eran emitidos en oposición a ω , de modo que en el experimento de reflexión se emitirían más electrones a lo largo de ω (porque $\mathbf{v}$ cambia de signo en la reflexión, mientras que ω no cambia). El experimento difiere de la imagen de un espejo; se encontró que la simetría de la inversión y la ley de conservación asociada llamada **conservación de la paridad** no eran válidas en este caso.*

Este experimento comenzó a revolucionar nuestro pensamiento con respecto a los procesos fundamentales, y proporcionó una clave esencial con respecto a la naturaleza de la ley física que es responsable del proceso de desintegración beta, una de las cuatro fuerzas básicas. Fue el preludio de una serie de experimentos que han revelado otras relaciones entre las propiedades de la transformación, los principios de la invariancia, y las simetrías. ■

* Véase *the New Ambidextrous Universe*, por Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).

PREGUNTAS

- En 1969, tres astronautas del Apolo salieron de Cabo Cañaveral, fueron a la Luna y regresaron, cayendo en el agua en un lugar de acuatizaje elegido en el océano Pacífico; véase la figura 21. Un almirante les dio el adiós en la base y luego zarpó al océano Pacífico en un portaviones para recogerlos. Compare los desplazamientos de los astronautas y del almirante.

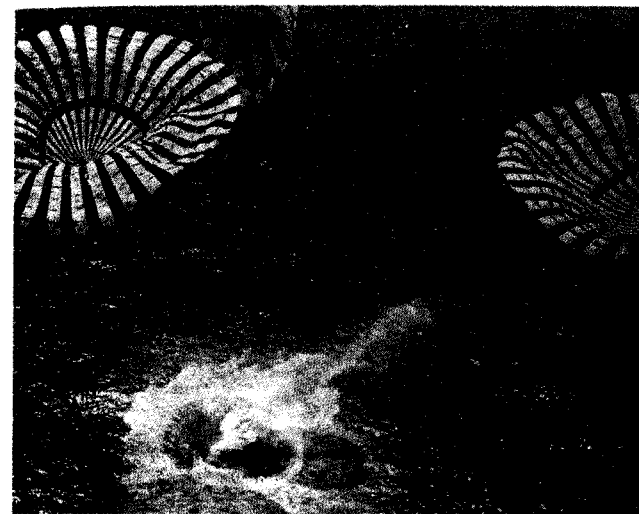


Figura 21 Pregunta 1.

- Un perro corre 100 m hacia el sur, 100 m hacia el este, y 100 m al norte, terminando en el punto de arranque, por lo que su desplazamiento de todo el viaje es igual a cero. ¿Dónde está su punto de arranque? Una respuesta clara es que en el Polo Norte; pero hay otra solución, localizada cerca del Polo Sur. Descríbala.
- ¿Pueden combinarse dos vectores que tengan diferentes magnitudes para dar una resultante de cero? ¿Y tres vectores?
- ¿Puede tener un vector una magnitud cero si una de sus componentes no es cero?
- ¿Puede ser la suma de las magnitudes de dos vectores alguna vez igual a la magnitud de la suma de estos dos vectores?
- ¿Puede ser la magnitud de la diferencia entre dos vectores alguna vez mayor que la magnitud de cualquiera de ellos? ¿Puede ser mayor que la magnitud de su suma? Dé ejemplos.

- Supongamos que $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. ¿Significa esto que debemos tener ya sea $d \geq d_1$, o $d \geq d_2$? Si no, explique por qué.
- Si tres vectores se suman para ser cero, deben estar todos en el mismo plano. Haga que esto parezca razonable.
- ¿Tienen unidades los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$?
- Explique en qué sentido una ecuación vectorial contiene más información que una cantidad escalar.
- Nombre varias cantidades escalares. ¿Depende el valor de una cantidad escalar del sistema de coordenadas elegido?
- Usted puede ordenar acontecimientos en el tiempo. Por ejemplo, el suceso b debe preceder al suceso c pero seguir del a , dándonos un orden de tiempo de los acontecimientos a, b, c . Por lo tanto, existe un sentido del tiempo, distinguiendo el pasado, el presente, y el futuro. ¿Es el tiempo, por lo tanto, un vector? Si no, ¿por qué no?
- Se aplican las leyes conmutativa y asociativa a la resta de vectores?
- ¿Puede ser un producto escalar una cantidad negativa?
- (a) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, ¿se deduce que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares entre sí? (b) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, ¿se deduce que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
- Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, ¿deben $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ ser paralelos entre sí? ¿Es verdad lo recíproco?
- Un vector $\mathbf{a}$ yace paralelo al eje de rotación de la Tierra, apuntando de sur a norte. Un segundo vector $\mathbf{b}$ apunta verticalmente hacia arriba hacia donde usted se encuentra. ¿Cuál es la dirección del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$? ¿En qué lugares de la superficie de la Tierra es la magnitud $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ un máximo? ¿Y un mínimo?
- ¿Debe usted especificar un sistema de coordenadas cuando (a) suma dos vectores, (b) forma su producto escalar, (c) forma su producto vectorial, o (d) halla sus componentes?
- (a) Demuestre que si todas las componentes de un vector invierten su dirección, entonces el propio vector invierte su dirección. (b) Demuestre que si las componentes de los dos vectores que forman un vector producto se invierten, entonces el vector producto no cambia. (c) ¿Es un vector producto, entonces, un vector?
- Hemos estudiado la adición, la resta y la multiplicación de vectores. ¿Por qué supone usted que no hemos estudiado la división de vectores? ¿Es posible definir tal operación?
- ¿Es convencional usar, como lo hicimos, la regla de la mano derecha en el álgebra vectorial? ¿Qué cambios se requerirían si se adoptase en su lugar una convención de la mano izquierda?
- (a) Convénzase usted mismo de que el producto vectorial de dos vectores polares es un vector axial. (b) ¿Cuál es el producto vectorial de un vector polar por un vector axial?

PROBLEMAS

Sección 3-2 Suma de vectores: método gráfico

- Considere dos desplazamientos, uno de magnitud 3 m y otro de magnitud 4 m. Muestre cómo pueden combinar-

se los vectores de desplazamiento para obtener un desplazamiento resultante de magnitud (a) 7 m, (b) 1 m, y (c) 5 m.

- ¿Cuáles son las propiedades de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tales que (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ y $a + b = c$; (b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$; (c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ y $a^2 + b^2 = c^2$?
- Una mujer camina 250 m en dirección 35° NE, y luego 170 m hacia el este. (a) Usando métodos gráficos, halle su desplazamiento final a partir del punto de arranque. (b) Compare la magnitud de su desplazamiento con la distancia que recorrió.
- Una persona camina con el siguiente esquema: 3.1 km norte, luego 2.4 km oeste, y finalmente 5.2 km sur. (a) Construya el diagrama vectorial que representa a este movimiento. (b) ¿Qué tan lejos y en qué dirección volaría un pájaro en línea recta para llegar al mismo punto final?
- Se suman dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Muestre gráficamente con diagramas vectoriales que la magnitud de la resultante no puede ser mayor que $a + b$ ni menor que $|a - b|$, donde las barras verticales significan un valor absoluto.
- Un automóvil recorre hacia el este una distancia de 54 km, luego al norte 32 km y luego en dirección 28° NE durante 27 km. Dibuje el diagrama vectorial y determine el desplazamiento total del automóvil desde el punto de arranque.
- El vector $\mathbf{a}$ tiene una magnitud de 5.2 unidades y está dirigido hacia el este. El vector $\mathbf{b}$ tiene una magnitud de 4.3 unidades y está dirigido 35° NO. Construyendo los diagramas vectoriales, halle las magnitudes y direcciones de (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, y (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
- Un golfista ejecuta tres golpes para meter la bola en el hoyo cuando está en el green. El primer golpe desplaza a la bola 12 ft N, el segundo 6 ft SE, y el tercero 3 ft SO. ¿Qué desplazamiento se necesitaría para meter la bola en el hoyo al primer golpe? Trace el diagrama vectorial.
- Hay un robo en un banco del centro de Boston (véase el mapa de la Fig. 22). Para eludir a la policía, los ladrones escapan en un helicóptero, haciendo tres vuelos sucesivos descritos por los desplazamientos siguientes: 20 mi, 45° SE; 33 mi, 26° al NO; 16 mi, 18° SE. Al final del tercer vuelo son capturados. ¿En qué ciudad fueron aprehendidos? (Use el método gráfico para sumar estos desplazamientos en el mapa.)

Sección 3-3 Componentes de vectores

- (a) ¿Cuáles son las componentes de un vector $\mathbf{a}$ en el plano xy si su dirección es 252° a antihorario del eje x positivo y su magnitud es de 7.34 unidades? (b) La componente x de cierto vector es de -25 unidades y la componente y es de +43 unidades. ¿Cuál es la magnitud del vector y el ángulo entre su dirección y el eje x positivo?
- Una pieza pesada de maquinaria es elevada y deslizada a lo largo de 13 m en un plano inclinado orientado a 22° de la horizontal, como se muestra en la figura 23. (a) ¿A qué altura de su posición original es levantada? (b) ¿A qué distancia se movió horizontalmente?
- La manecilla minutería de un reloj de pared mide 11.3 cm del eje a la punta. ¿Cuál es el vector del desplazamiento de su punta (a) desde un cuarto de hora hasta la media hora, (b) en la siguiente media hora, y (c) en la siguiente hora?

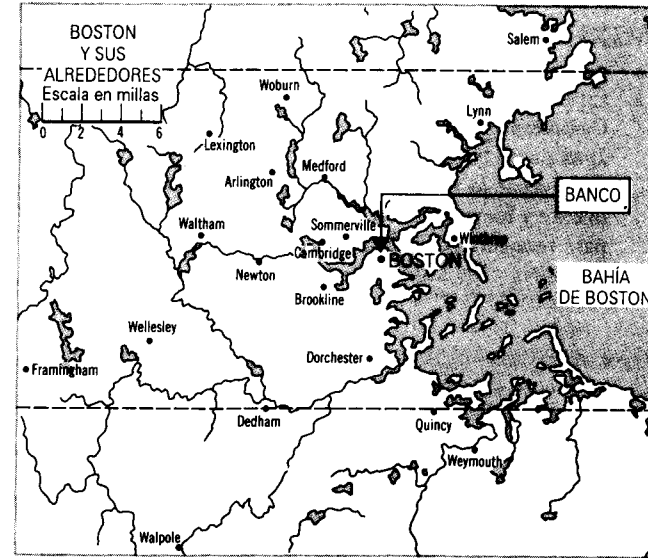


Figura 22 Problema 9.

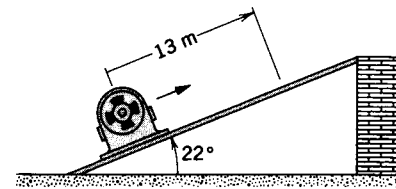


Figura 23 Problema 11.

- Una persona desea llegar a un punto que está a 3.42 km de su ubicación actual y en una dirección de 35.0° NE. Sin embargo, debe caminar a lo largo de calles que van ya sea de norte a sur o de este a oeste. ¿Cuál es la distancia mínima que podría caminar para llegar a su destino?
- Un barco se dispone a zarpar hacia un punto situado a 124 km al norte. Una tormenta inesperada empuja al barco hasta un punto a 72.6 km al norte y 31.4 km al este de su punto de arranque. ¿Qué distancia, y en qué dirección, debe ahora navegar para llegar a su destino original?
- Las fallas de las rocas son roturas a lo largo de las cuales se han movido las caras opuestas de la masa rocosa, paralelas a la superficie de fractura. Este movimiento está a menudo acompañado de terremotos. En la figura 24 los puntos A y B coincidían antes de la falla. La componente del desplazamiento neto AB paralela a una línea horizontal en la superficie de la falla se llama *salto de la dislocación* (AC). La componente del desplazamiento neto a lo largo de la línea con mayor pendiente del plano de la falla es la *brecha de la dislocación* (AD). (a) ¿Cuál es la desviación neta si el salto de la dislocación es de 22 m y la brecha de la dislocación es de 17 m? (b) Si el plano de la falla está inclinado a 52° de la horizontal, ¿cuál es el desplazamiento vertical neto de B como resultado de la falla en (a)?
- Una rueda de radio de 45 cm gira sin resbalamiento a lo largo de un piso horizontal, como se muestra en la figura 25. P es un punto pintado sobre la llanta de la rueda. En

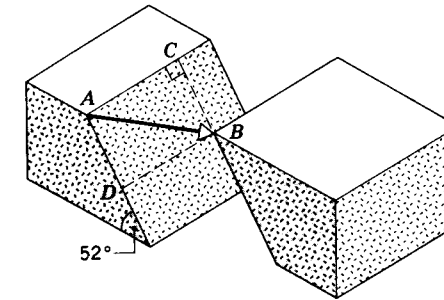


Figura 24 Problema 15.

el tiempo t_1 , P está en el punto de contacto entre la rueda y el piso. En un tiempo t_2 posterior, la rueda ha rodado a la mitad de una vuelta. ¿Cuál es el desplazamiento de P durante el intervalo?

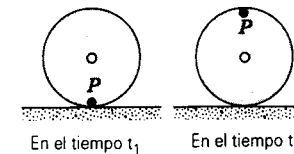


Figura 25 Problema 16.

- Una habitación tiene las dimensiones de 10 ft $\times$ 12 ft $\times$ 14 ft. Una mosca que sale de una esquina termina su vuelo en la esquina diametralmente opuesta. (a) Halle el vector del desplazamiento en un marco con los ejes de coordenadas paralelos a las aristas de la habitación. (b) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento? (c) ¿Podría la longitud de la trayectoria viajada por la mosca ser menor que esta distancia? ¿Mayor que esta distancia? ¿Igual a esta distancia? (d) Si la mosca caminara en lugar de volar, ¿cuál sería la longitud de la trayectoria más corta que puede recorrer?

Sección 3-4 Suma de vectores: método de las componentes

- (a) ¿Cuál es la suma, en la notación del vector unitario, de los dos vectores $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$? (b) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$?
- Dos vectores están dados por $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Halle (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, y (c) un vector $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.
- Dados dos vectores, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, halle las magnitudes y direcciones (con el eje $+x$) de (a) $\mathbf{a}$, (b) $\mathbf{b}$, (c) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (d) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, y (e) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
- (a) Un hombre sale de la puerta frontal, camina 1400 m E, 2100 m N, y luego saca un centavo de su bolsillo y lo suelta desde un acantilado de 48 m de altura. En un sistema de coordenadas en el cual los ejes x , y , y z positivos apunten al este, al norte, y hacia arriba, estando el origen en la ubicación del centavo según el hombre sale de su puerta frontal, escriba una expresión, usando vectores unitarios, para el desplazamiento del centavo. (b) El hom-

bre regresa a su puerta frontal, siguiendo una trayectoria diferente en el viaje de regreso. ¿Cuál es su desplazamiento resultante para el viaje redondo?

- Una partícula experimenta tres desplazamientos sucesivos en un plano, como sigue: 4.13 m SO, 5.26 m E, y 5.94 m en una dirección de 64.0° NE. Elija el eje x apuntando al este y el eje y apuntando hacia el norte, y halle (a) las componentes de cada desplazamiento, (b) las componentes del desplazamiento resultante, (c) la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante, y (d) el desplazamiento que se requeriría para traer de nuevo a la partícula hasta el punto del arranque.
- Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen magnitudes iguales de 12.7 unidades. Están orientados como se muestra en la figura 26 y su vector suma es $\mathbf{r}$. Halle (a) las componentes x y y de $\mathbf{r}$, (b) la magnitud de $\mathbf{r}$, y (c) el ángulo que forma $\mathbf{r}$ con el eje $+x$.

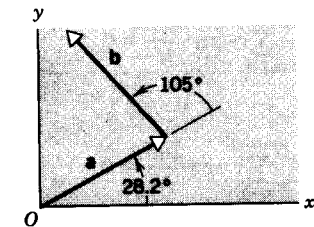


Figura 26 Problema 23.

- Una estación de radar detecta a un cohete que se aproxima desde el este. En el primer contacto, la distancia al cohete es de 12,000 ft a 40.0° sobre el horizonte. El cohete es rastreado durante otros 123° en el plano este-oeste, siendo la distancia del contacto final de 25,800 ft (véase la Fig. 27). Halle el desplazamiento del cohete durante el periodo de contacto del radar.

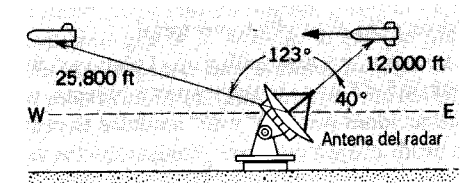


Figura 27 Problema 24.

- Dos vectores de magnitudes a y b forman un ángulo θ entre sí cuando son situados cola con cola. Pruebe, tomando componentes a lo largo de dos ejes perpendiculares, que la magnitud de su suma es

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}.$$

- Pruebe que dos vectores deben tener magnitudes iguales si su suma es perpendicular a su diferencia.

27. (a) Usando vectores unitarios a lo largo de tres aristas de un cubo, exprese las diagonales (las líneas de una esquina a otra a través del centro del cubo) de un cubo en términos de sus aristas, las cuales tienen una longitud a . (b) Determine los ángulos formados por las diagonales con las aristas adyacentes. (c) Determine la longitud de las diagonales.
28. Un turista vuela de Washington, DC a Manila. (a) Describa el vector de desplazamiento. (b) ¿Cuál es su magnitud? La latitud y la longitud de las dos ciudades es de 39° N, 77° O y 15° N, 121° E. (Sugerencia: véase la Fig. 7 y las Ecs. 7. Haga que el eje z esté a lo largo del eje de rotación de la Tierra, de modo que $\theta = 90^\circ - \text{latitud}$ y $\phi = \text{longitud}$. El radio de la Tierra es de 6370 km.)
29. Sea N un entero mayor que 1; entonces

$$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \cdots + \cos(N-1) \frac{2\pi}{N} = 0;$$

esto es,

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

También

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \sin \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

Pruebe estos dos planteamientos considerando la suma de N vectores de igual longitud, formando cada vector un ángulo de $2\pi/N$ con el precedente.

Sección 3-5 Multiplicación de vectores

30. Un vector $\mathbf{d}$ tiene una magnitud de 2.6 m y apunta hacia el norte. ¿Cuáles son las magnitudes y las direcciones de los vectores (a) $-\mathbf{d}$, (b) $\mathbf{d}/2.0$, (c) $-2.5\mathbf{d}$, y (d) $5.0\mathbf{d}$?
31. Demuestre para cualquier vector $\mathbf{a}$ que (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ y (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.
32. Un vector $\mathbf{a}$ de 12 unidades de magnitud y otro vector $\mathbf{b}$ de 5.8 unidades de magnitud apuntan en direcciones que difieren en 55° . Halle (a) el producto escalar de los dos vectores y (b) el producto vectorial.
33. Dos vectores, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$, se hallan en el plano xy . Sus magnitudes son 4.5 y 7.3 unidades, respectivamente, mientras que sus direcciones son 320° y 85° medidas en sentido antihorario desde el eje x positivo. ¿Cuáles son los valores de (a) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ y (b) $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$?
34. Halle (a) "norte" cruz "oeste", (b) "abajo" punto "sur", (c) "este" cruz "arriba", (d) "oeste" punto "oeste", y (e) "sur" cruz "sur". Haga que cada vector tenga una magnitud unitaria.
35. Dados dos vectores, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, demuestre que el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ está dado en términos de las componentes por la ecuación 15.
36. Dados dos vectores, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, Pruebe que el producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dado en términos de las componentes por la ecuación 17.
37. Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ puede ser expresada por un determinante de 3×3 tal como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

38. Use las ecuaciones 13 y 15 para calcular el ángulo entre los dos vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
39. Tres vectores están dados por $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Halle (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, (b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, y (c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
40. (a) Calcule $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. (b) Calcule el ángulo entre $\mathbf{r}$ y el eje $+z$. (c) Halle el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
41. Tres vectores suman cero, como en el triángulo rectángulo de la figura 28. Calcule (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, y (c) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

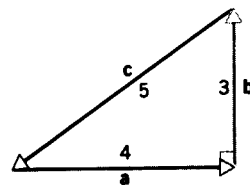


Figura 28 Problemas 41 y 42.

42. Tres vectores suman cero, como en la figura 28. Calcule (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$, y (c) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
43. El vector $\mathbf{a}$ está en el plano yz a 63.0° del eje $+y$ con una componente z positiva y tiene una magnitud de 3.20 unidades. El vector $\mathbf{b}$ se halla en el plano xz a 48.0° del eje $+x$ con una componente z positiva y tiene una magnitud de 1.40 unidades. Halle (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, y (c) el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
44. (a) Hemos visto que la ley conmutativa *no* se aplica a los productos vectoriales; esto es, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ no es igual a $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Demuestre que la ley conmutativa *sí* se aplica a los productos escalares; esto es, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. (b) Demuestre que la ley distributiva se aplica tanto a los productos escalares como a los productos vectoriales; esto es, demuestre que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

y que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

- (c) ¿Se aplica la ley asociativa a los productos vectoriales, esto es, es $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ igual a $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$? (d) ¿Tiene algún sentido hablar de una ley asociativa para los productos escalares?
45. Demuestre que el área del triángulo contenido entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (Fig. 29) es $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, donde las barras verticales significan una magnitud.
46. Demuestre que la magnitud de un producto vectorial da numéricamente el área del paralelogramo formado por los dos vectores componentes como lados (véase la Fig. 29). ¿Sugiere esto cómo un elemento de área orientado en el espacio estaría representado por un vector?

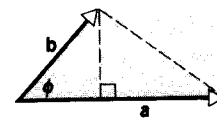


Figura 29 Problemas 45 y 46.

47. Demuestre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ es igual en magnitud al volumen del paralelepípedo formado sobre los tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, y $\mathbf{c}$ como se muestra en la figura 30.

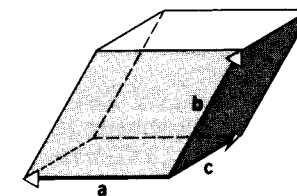


Figura 30 Problema 47.

48. Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen componentes, en unidades arbitrarias, $a_x = 3.2$, $a_y = 1.6$; $b_x = 0.50$, $b_y = 4.5$. (a) Halle el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. (b) Halle las componentes de un vector $\mathbf{c}$ que sea perpendicular a $\mathbf{a}$, esté en el plano xy , y tenga una magnitud de 5.0 unidades.
49. Halle los ángulos entre las diagonales del cuerpo de un cubo. Véase el problema 27.
50. Los tres vectores que se muestran en la figura 31 tienen magnitudes $a = 3$, $b = 4$ y $c = 10$. (a) Calcule las componentes x y y de estos vectores. (b) Halle los números p y q tales que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$.

Sección 3-6 Leyes vectoriales en la física

51. Use la figura 10b para derivar las ecuaciones 18.
52. Un vector $\mathbf{a}$ con una magnitud de 17 m está dirigido 56° en sentido antihorario del eje $+x$, como se muestra en la figura 32. (a) ¿Cuáles son las componentes a_x y a_y del vector? (b) Un segundo sistema de coordenadas está inclinado en 18° con respecto al primero. ¿Cuáles son las componentes a_x' y a_y' en este sistema "primo" de coordenadas?

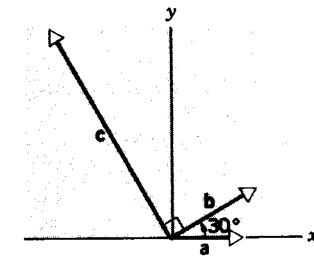


Figura 31 Problema 50.

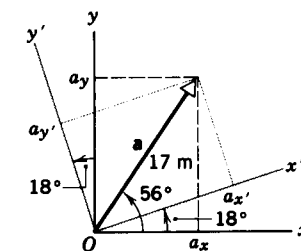


Figura 32 Problema 52.

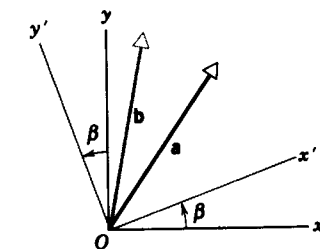


Figura 33 Problema 53.

53. La figura 33 muestra dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y dos sistemas de coordenadas que difieren en que los ejes x y x' y los ejes y y y' forman cada uno un ángulo β con el otro. Pruebe analíticamente que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ tiene la misma magnitud y dirección sin importar qué sistema se haya usado para llevar a cabo el análisis. (Sugerencia: Use las Ecs. 18).

CAPÍTULO 4

MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL

Este capítulo presenta una combinación o síntesis de los conceptos desarrollados en los capítulos 2 y 3. Continuaremos ahora describiendo el movimiento de una partícula en términos de su posición, velocidad, y aceleración, como lo hicimos en el capítulo 2. Sin embargo, eliminamos la restricción impuesta en el capítulo 2 de que la partícula se mueve sólo en línea recta. Ahora permitimos que la partícula se mueva a través de un sistema de coordenadas tridimensional ordinario. El hecho de tener en cuenta las componentes x , y , y z del movimiento se simplifica grandemente al usar una notación basada en los vectores. Vemos que las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2 pueden aplicarse en el caso general simplemente reemplazando a la variable unidimensional con el vector correspondiente. Se tratan dos conocidos ejemplos del movimiento como aplicaciones de la técnicas vectoriales: un proyectil disparado bajo la acción de la gravedad terrestre con componentes de la velocidad tanto horizontal como vertical, y un objeto que se mueve en una trayectoria circular.

4-1 POSICIÓN, VELOCIDAD, Y ACCELERACIÓN

La figura 1 muestra una partícula en el tiempo t que se mueve en una trayectoria curva en tres dimensiones. Su *posición*, o desplazamiento desde el origen, está medida por el vector $\mathbf{r}$. La *velocidad* está indicada por el vector $\mathbf{v}$ el cual, como demostraremos enseguida, debe ser tangente a la trayectoria de la partícula. La *aceleración* está indicada por el vector $\mathbf{a}$, cuya dirección, como veremos explícitamente más adelante, no guarda en lo general ninguna relación única con la posición de la partícula o la dirección de $\mathbf{v}$.

En coordenadas cartesianas, la partícula se localiza por x , y , y z , las cuales son las componentes del vector $\mathbf{r}$ que da la posición de la partícula:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1)$$

Supongamos que la partícula se mueve de una posición $\mathbf{r}_1$ en el tiempo t_1 a la posición $\mathbf{r}_2$ en el tiempo t_2 , como se muestra en la figura 2a. Su desplazamiento (cambio de posición) en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el vector $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y la velocidad promedio $\bar{\mathbf{v}}$ en el intervalo Δt es

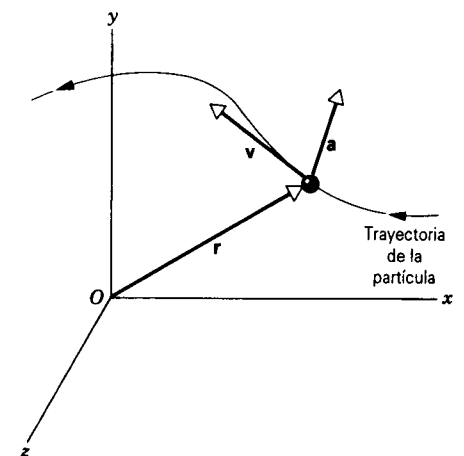


Figura 1 Vectores de posición, velocidad, y aceleración de una partícula que se mueve en una trayectoria arbitraria. Las longitudes relativas de los tres vectores son independientes entre sí, como lo son sus direcciones relativas.

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (2)$$

En la ecuación 2, el vector $\Delta \mathbf{r}$ está multiplicado por el escalar $1/\Delta t$ para dar el vector $\bar{\mathbf{v}}$. Entonces $\bar{\mathbf{v}}$ debe tener la misma dirección que $\Delta \mathbf{r}$.